

＜光学の古典を読む＞

エアリーの円形開口の回折に関する論文 (1834年*)の紹介

(*)On the Diffraction of an Object glass with Circular Aperture.

(円形開口を持つ対物レンズの回折について)

by George Biddell Airy, 1834

2019年7月

作成:舟越 和己

はじめに

ここで紹介する論文の著者 G. B. エアリーはイギリスの物理学者・天文学者でケンブリッジ大学天文学・実験物理学プルミアン教授職、グリニッジ天文台台長(王室天文官)などを務めました。



Sir George Biddell Airy (1801-1892)

エアリーは 今から 180 年以上前の 1834 年に
本資料で紹介する「**円形開口の対物レンズの回折について**」を著しました。

そのころの日本は、江戸時代の後期で水野忠邦が老中になった頃でした。

(1834 年は日本各地を測量した伊能忠敬が亡くなって 16 年後です)

エアリーはこの論文により、「**光が波である**」という性質を使って、
天体望遠鏡による星の像が**点像**ではなく、
「**一定の大きさを持った円盤像及びそれを囲む複数のリング**」となることを
理論的に示しました。この円盤像は**エアリーディスク**と呼ばれます。

これらは今日、天体望遠鏡の分解能や MTF(Modulation Transfer Function)を議論する際のベースになっています。

一般に、回折理論は数式を通して計算によってしか正確に表現できないので非常に難しく見えます。この資料はエアリーの回折に関する論文のアウトラインを紹介するものです。第1部は導入部で、式を使わない簡単な説明です。第2部は論文に沿った説明です。尚、エアリーの論文の日本語訳と原文は付録に付けました。

この資料は

「星の回折像が見える仕組みを知りたい」

「屈折望遠鏡と遮蔽のある望遠鏡の回折像に違いが出る理由を知りたい」

など、回折像に興味のある人向けです。

目次

はじめに

| | |
|--|-----------|
| 第1部 回折像とエアリーの論文の簡単な紹介 | 5 |
| 1 回折とは？ | 6 |
| 2 光の回折と望遠鏡 | 6 |
| 3 星の回折像を観察した人 | 8 |
| 4 エアリーの回折の論文とは？ | 9 |
| | |
| 第2部 エアリーの論文の紹介 | 12 |
| 0. 論文を読むための準備 | 13 |
| 0. 1 座標 | 14 |
| 0. 2 数の表し方 (n 乗、n 乗根) | 15 |
| 0. 3 ピタゴラスの定理 (三平方の定理) | 15 |
| 0. 4 三角比 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ | 16 |
| 0. 5 三角関数 $y=\sin x$, $y=\cos x$ | 17 |
| 0. 6 角度の表し方 (弧度法) | 17 |
| 0. 7 関数 $y=\sin x$, $y=\cos x$ のグラフ表示 | 19 |
| 0. 8 偶関数と奇関数 | 21 |
| 0. 9 正弦波の基本的な用語 | 22 |
| 0. 10 光を正弦波として表現すると | 22 |
| 0. 11 正弦波の時間的推移 | 23 |
| 0. 12 光源からの距離による光の明るさの変化 | 25 |
| 0. 13 正弦波の合成 | 26 |
| 0. 14 近似式及び三角関数の級数展開 | 27 |
| 0. 15 円の方程式について | 27 |
| 0. 16 シグマ (Σ) と積分 (\int) | 28 |

| | |
|---|-----------|
| 1. エアリーの論文の内容紹介(その1:円形開口) | 30 |
| 1. 1 3次元の座標系(x, y, z)の導入 | 30 |
| 1. 2 焦点近傍の点 P への回折光の数式表現 | 30 |
| 1. 3 対物レンズの y 軸に平行な断面から点 P に集る回折光 | 32 |
| 1. 4 対物レンズの y 軸に平行な断面から点 P に集る回折光を 真上から見る | 34 |
| 1. 5 対物レンズ全体から点 P に集る回折光を計算 | 35 |
| 1. 6 積分 $\int \{(1-w^2)^{1/2} * \cos nw\} dw$ の計算 | 40 |
| 1. 7 積分 $(4/\pi) \times \int \{(1-w^2)^{1/2} * \cos nw\} dw$ の値のグラフ | 42 |
| 1. 8 光の強度とは? | 44 |
| 1. 9 回折像の光の強度 | 45 |
| 1. 10 焦点近傍の点 P を対物レンズの中心からの角度で表す | 48 |
| 1. 11 明るい星と暗い星の回折像の見え方の比較 | 51 |

| | |
|----------------------------------|-----------|
| 2. エアリーの論文の内容紹介(その2:中央遮蔽) | 52 |
| 2. 1 中央遮蔽とは | 52 |
| 2. 2 中央遮蔽の光学系の回折像 | 52 |

| | |
|---|-----------|
| 付録1 $q \doteq f - bx/f$ の証明 | 54 |
|---|-----------|

| | |
|--------------------|-----------|
| 付録2 エアリーの論文 | 56 |
| (1) 日本語訳 | 56 |
| (2) 原文 | 62 |

| | |
|------------|-----------|
| 付録3 | 69 |
|------------|-----------|

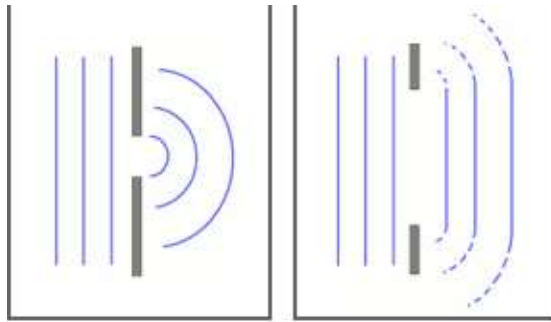
積分 $\int (1-w^2)^{1/2} dw, \int (1-w^2)^{1/2} w^2 dw, \int (1-w^2)^{1/2} w^4 dw, \int (1-w^2)^{1/2} w^6 dw$ の計算

| | |
|---|-----------|
| 付録4 微分方程式 $N + (3/n) * dN/dn + d^2N/dn^2 = 0$ を解く | 70 |
|---|-----------|

第1部 回折像とエアリーの論文 の簡単な紹介

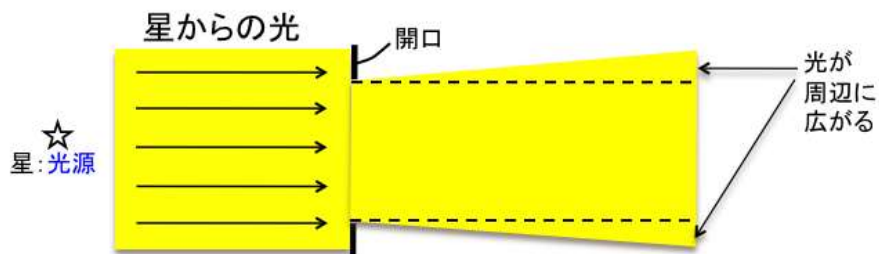
1. 回折とは？

- ・進行する波に対し障害物が存在する時、
波はその障害物の背後など、つまり一見すると幾何学的には到達できない領域に**回り込んで伝わります**。
物理学者はこの現象を**回折**(diffraction: **ディフラクション**)と呼んでいます。

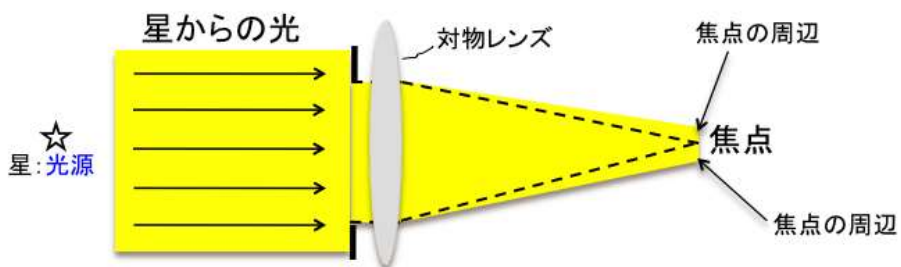


2. 光の回折と望遠鏡

- ・光も波なので回折現象が起きます。
(例) 星からの光が、穴の空いた物（これを開口と言います）により穴の周辺の光を遮断されると、光の回折により通過した光は周辺に広がり、直進の破線よりも外側に届きます。

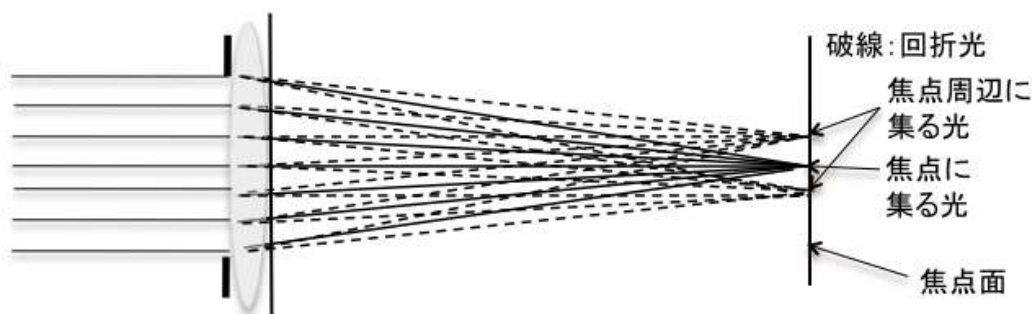


ここで、開口の直後に**対物レンズ**を置くと



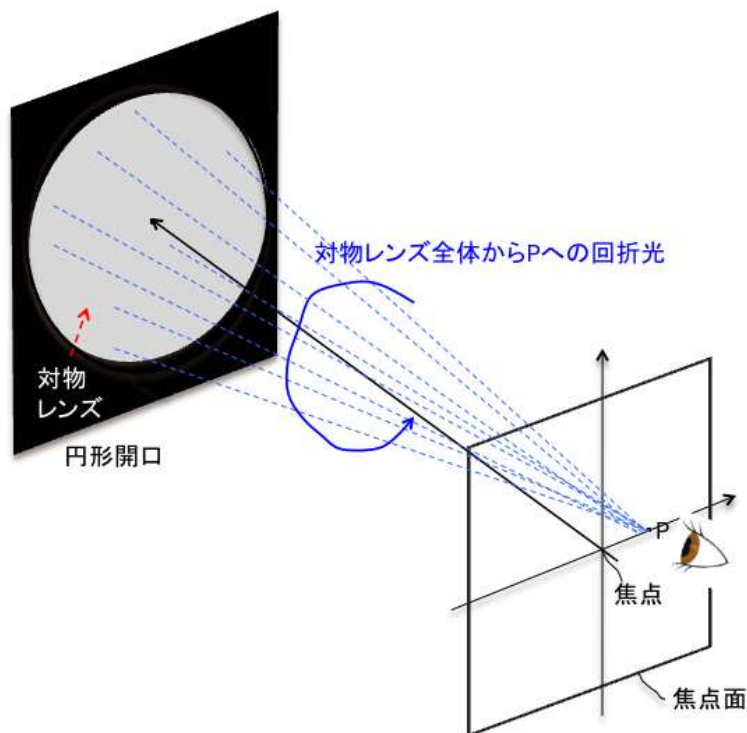
対物レンズにより星からの光は、「焦点という1点ではなく、**焦点の周り**」に集まります！

つまり、焦点の周辺にも回折した光が焦点を結ぶということです；



これは、もし焦点の近傍の点 P に眼を置くと対物レンズ全体からの回折光が集っているのが見えます。3次元で表現すると下の図のようになります。

このとき、P が焦点に位置から横にずれているので、対物レンズ全体から P に集まる回折光は出発点に対物レンズのどの位置かにより、各々進む距離に差が生じます。光は波なので進む距離の差が生じると、その差に応じて合成された波は強め合ったり、弱め合ったりします。合成された光の波の強弱は P の位置に依存します。このようにして、対物レンズ全体から P への回折光は P の位置により明暗が発生します。



具体的には、焦点周辺に集る光（回折光）は、中央の明るいディスクとそれを囲む同心円のリングから成ります（下の写真）。これは光の回折により生じるので「**回折像**」と呼ばれます。また、中央の明るいディスクは、「**セントラルスポット**」又は「**エアリーディスク**」と呼ばれます。「エアリーディスク」という名前は、今回紹介する論文を書いた George Biddell Airy に由来します。



エアリーディスクは非常に小さく、望遠鏡の焦点比（焦点距離÷口径）を F 、光の波長を λ とするとき、焦点面で見る半径は

$$1.22 \times \lambda \times F$$

という式で表されます。

例えば、光の波長を $\lambda = 500\text{nm}$ （ナノメートル） $= 0.0005\text{mm}$ 、望遠鏡の焦点比 $F = 10.0$ とするとき、エアリーディスクの半径 $= 1.22 \lambda F = 0.006\text{mm}$ です。この像を 300 倍で見ると、 $0.006 * 300 = 1.8\text{mm}$ です。従って、星の回折像は接近した二重星を見るときなど、天体望遠鏡を高倍率にしたときに見ることができます。

3. 星の回折像を観察した人

歴史的には天王星を発見した W. ハーシェルが星の回折像を詳しく観察した最初の人です。19世紀の英国の科学者レイリー卿は次のように述べています；「望遠鏡の開口の増大による回折像の縮小は W. ハーシェルにより観測されました。分解能に関する中央の光線の好ましくない影響はハーシェルも良く知っていました。彼は厚紙で中央部分をブロックする習慣がありました。」

また、最近出版された Neil English 著の "Chronicle of the Golden Age of Astronomy - A History of Visual Observing from Harriot to Moore -"（天文学の黄金時代の年代記 - ハリオットからムーアまでの眼視観測の歴史）の「第8章 ハーシェルの遺産」の中には次の記述があります；「ハーシェルは倍率を上げるとディスクのサイズが大きくなるが、望遠鏡の

有口径を小さくするとディスクが拡大することに気がきました。一方、ミラーの中央部を覆うとそれがないときに比べてディスクが小さくなる。・・・」

このように、W. ハーシェルは経験的に望遠鏡の口径が大きくなると回折像が小さくなることを知っていました。また、中央遮蔽により回折像のセントラルディスクが小さくなり高倍率の分解能に有利であることを知っていて、(ハーシェル式望遠鏡という) 無遮蔽の望遠鏡の中央部分を厚紙でブロックしていたというこのようです。

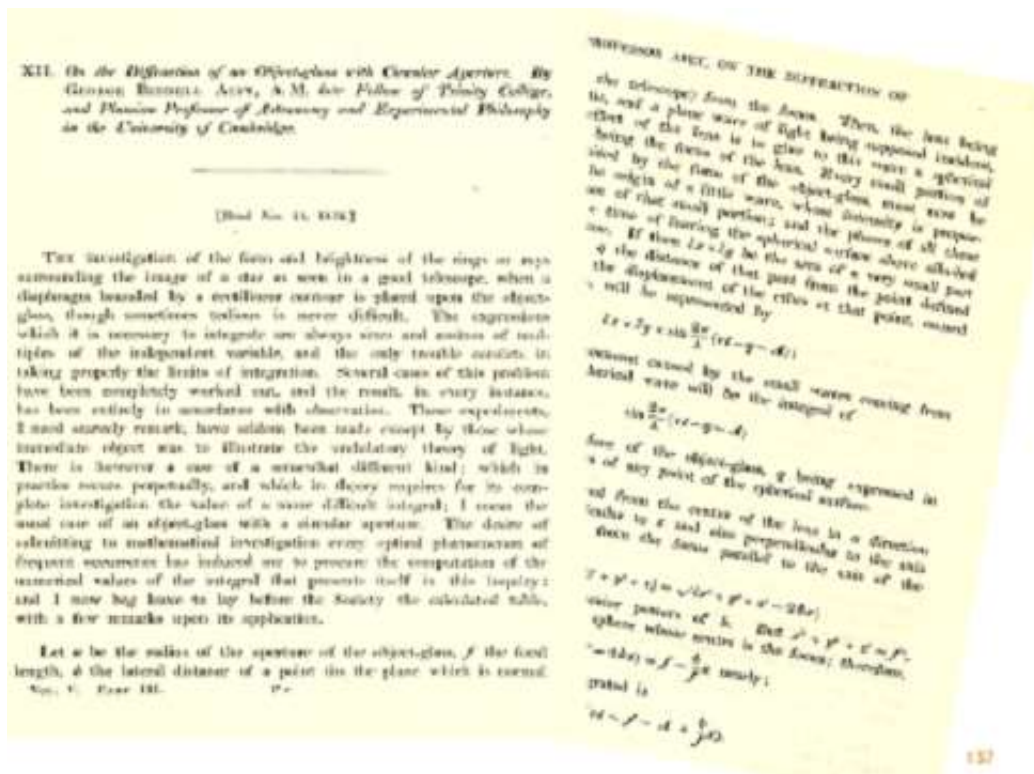
W. ハーシェルは経験的には回折像の性質を理解していましたが、その理論的説明は、波動光学に基づくエアリーの論文

“On the Diffraction of an Object glass with Circular Aperture.(円形開口を持つ対物レンズの回折について)”

により初めて達成されました。

4. エアリーの回折の論文とは？

今回紹介するエアリーの論文は、全部で9 ページの文章と数式のみで書かれています (論文の最後に計算結果の表はありますが、論文中に図は一切ありません)。

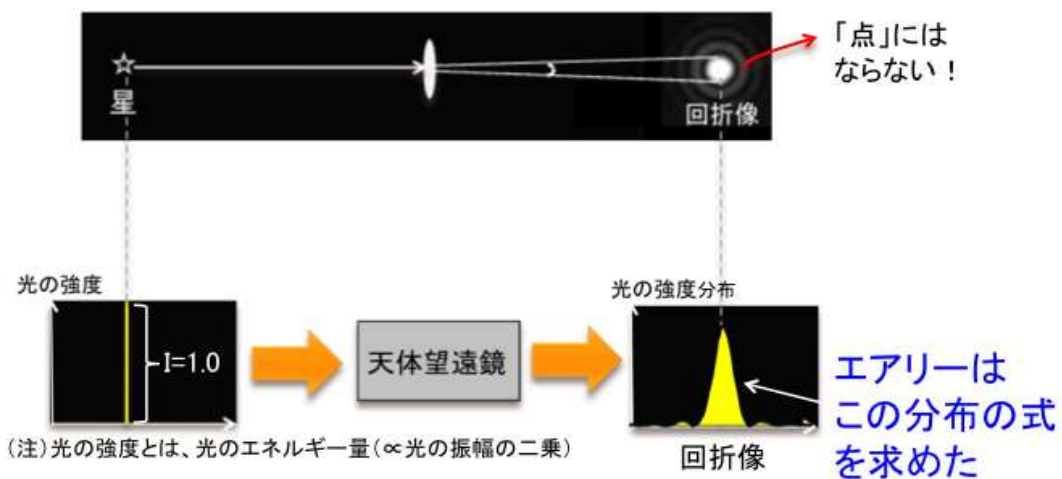


その内容は一言で言えば、

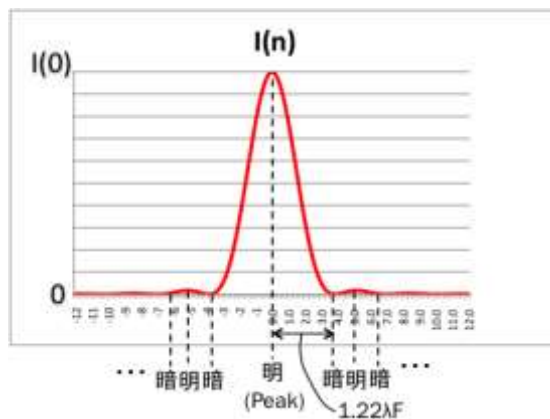
「開口が円形（注）のとき、回折像の光の強さの分布（下の図を参照）を計算により正確に求める」

ことです。

（注）開口が四角や長方形の場合は問題が簡単で当時既に解決されていましたが望遠鏡などレンズは円形なので開口が円形の場合が重要です。



つまり、回折像の光の強度分布 $I(n)$ をグラフで表すと、下の図のようになることを示しました。



このグラフを式で表現すると、

$$I(n) = I(0) * \{\Phi(n)\}^2$$

但し、 $\Phi(n) = 1 - n^2 / (2 \times 4) + n^4 / (2 \times 4^2 \times 6) - n^6 / (2 \times 4^2 \times 6^2 \times 8) + \dots$

です。 $\Phi(n)$ は複雑な係数の式ですが、ベッセル関数と関係します。この式がどのようにして導かれるかは、次の第2部「**エアリーの論文の紹介**」で詳しく説明します。

エアリーの論文により提示された回折の研究結果は、当時の英国の望遠鏡メーカー T. Cook & Sons の技術者 H. デニス・テイラーに影響を与え、「光学のテストと評価」の基準の確立に寄与しました(Neil English 著 Classic Telescopes 第2章 P.30 より)。

H. デニス・テイラーは、1891 年に、スターテストを描いた小さな本を出版しました。書名は、「対物レンズのテストと調整(Taylor 1983 The Adjustment and Testing of Telescope Objectives)」です。これらの図は何回もリプリントされ、Taylor の記述は多数の本に要約されています。この本の第3章 The Star Image の中でエアリーの回折論文の結果が紹介されています。

第2部 エアリーの論文の紹介

0. 論文を読むための準備

エアリーの論文が書かれたのは今から約200年近く前ですが、その当時の数学のレベルは現在では高校数学及び、大学の工学部で使う数学にも該当します。したがって、エアリーの論文を読むためには、ある程度の数学の知識が必要です。

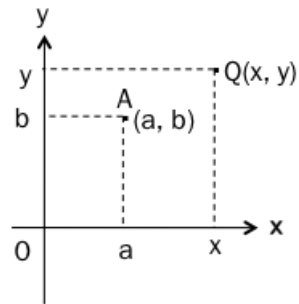
第0節では、エアリーの論文を読むために最小限必要な予備知識を説明します。中学・高校の数学(及び物理)を忘れてしまった人はここを読んでから「エアリーの論文」紹介に進んで下さい。中学・高校の数学(及び物理)をよく知っている人はここは飛ばして下さい。

読むための最小限の項目は下記です；

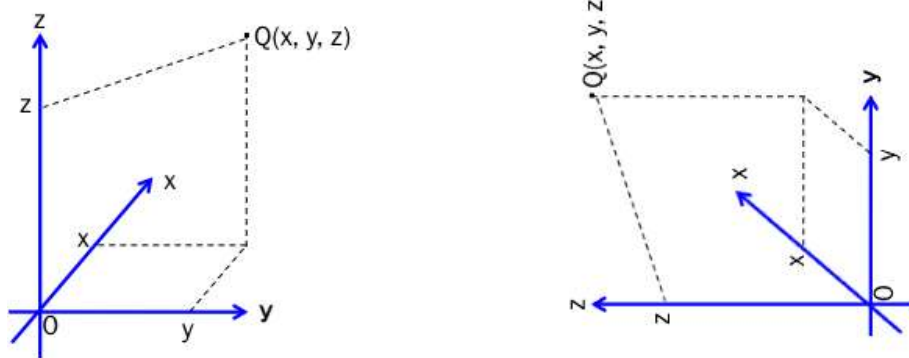
- ・座標
- ・数の表し方(n 乗、 n 乗根)
- ・ピタゴラスの定理(三平方の定理)
- ・三角比、三角関数
- ・角度の表し方(弧度法)
- ・関数 $y=\sin x$, $y=\cos x$ のグラフ表示
- ・偶関数と奇関数
- ・正弦波の基本的な用語
- ・光を正弦波として表現すること
- ・正弦波の時間的推移
- ・光の明るさの変化
- ・正弦波の合成
- ・近似式及び三角関数の級数展開
- ・円の方程式について
- ・シグマ(Σ)と積分(\int)

0.1 座標

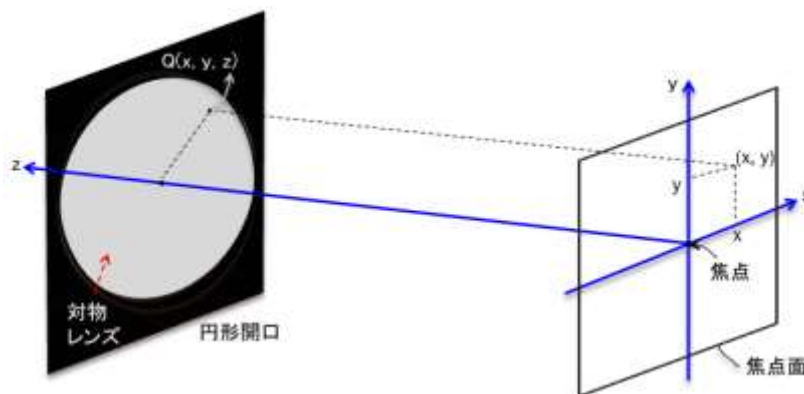
座標とは、点の位置を指定するために与えられる数の組です。例えば、下の図で、 (a, b) は平面上の点 A を指定する数の組です。これは、 $x=a, y=b$ を意味しています。また、平面上の任意の点 Q を表すときは、変数 x, y の組を使って $Q(x, y)$ とします。



3次元の空間では座標は (x, y, z) と3つの数の組となります(下の左の図)。下の右の図は、 z 軸を横にした場合です。



対物レンズを通過する光を表現するためには、対物レンズから焦点方向の軸(z 軸)と、焦点面の広がりを示す x 及び y 軸から成る**3次元空間の座標**が必要です。対物レンズ上の任意の点 Q の座標を $Q(x, y, z)$ とすると、 (x, y) は焦点面上の任意の点を表します。これは z 軸を横にした3次元空間です。



0.2 数の表し方(n乗、n乗根)

エアリーの論文中の計算では、数のn乗やn乗根がしばしば登場しますのでこれについて簡単に説明します。

同じ数aをn個かけた場合(aのn乗)、これを a^n で表します。

すなわち、 $a \times a \times \dots \times a = a^n$ (aをn個掛ける)

(例) $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ です。

aのn乗根はn乗してaになる数です。

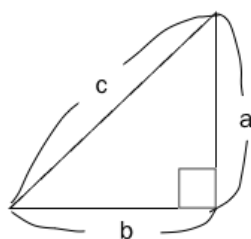
従って、aのn乗根=xとすると、 $x^n = a = (a^{1/n})^n$ これから、 $x = a^{1/n}$ となります。

すなわち、aのn乗根= $a^{1/n}$ (aのn乗根はaの1/n乗)

(例) 2の二乗根(平方根)= $2^{1/2}$ (2の二乗根は2の1/2乗)

0.3 ピタゴラスの定理(三平方の定理)

ピタゴラスの定理(三平方の定理)とは、直角三角形の3つの辺の長さの二乗について $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つことです。



$$a^2 + b^2 = c^2$$

これが成り立つことは下の図から分かります；

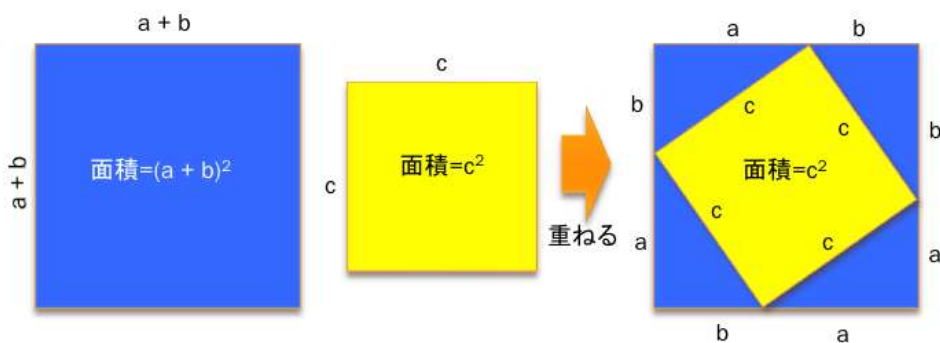
下の図で、青い正方形の面積は、 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ……①

黄色い正方形の面積 + 4つの青い直角三角形の面積は、

$$c^2 + 4ab/2 = c^2 + 2ab \dots\dots②$$

① と②は等しくなければならぬので、 $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$

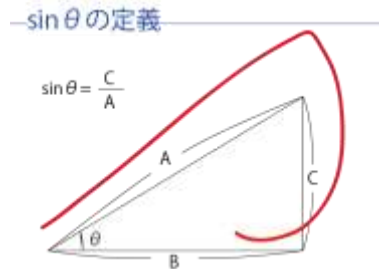
従って $a^2 + b^2 = c^2$ が成立します。



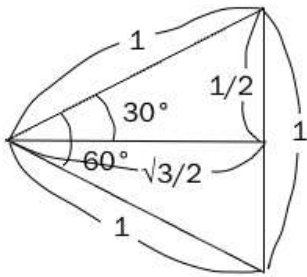
0.4 三角比 $\sin \theta$ と $\cos \theta$

(1) $\sin \theta$ とは？

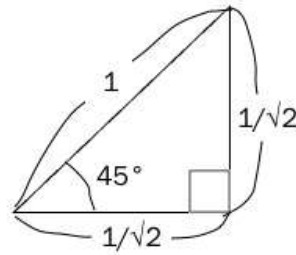
図のように角度 θ の直角三角形で、高さ/斜辺 = C/A のことです。



(例) $\sin 30^\circ = 1/2$, $\sin 45^\circ = 1/\sqrt{2}$,
 $\sin 90^\circ = 1$, $\sin 180^\circ = 0$, $\sin 0 = 0$
 $\sin 30^\circ$, $\sin 45^\circ$ の値は下の図を参照して下さい；



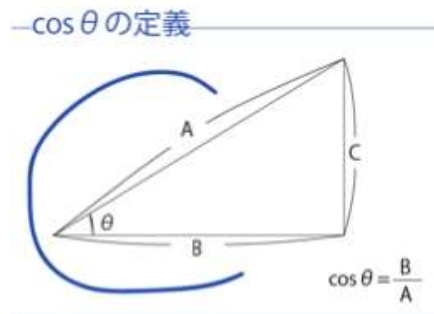
正三角形



直角二等辺三角形

(2) $\cos \theta$ とは？

図のように角度 θ の直角三角形で、底辺/斜辺 = B/A のことです。

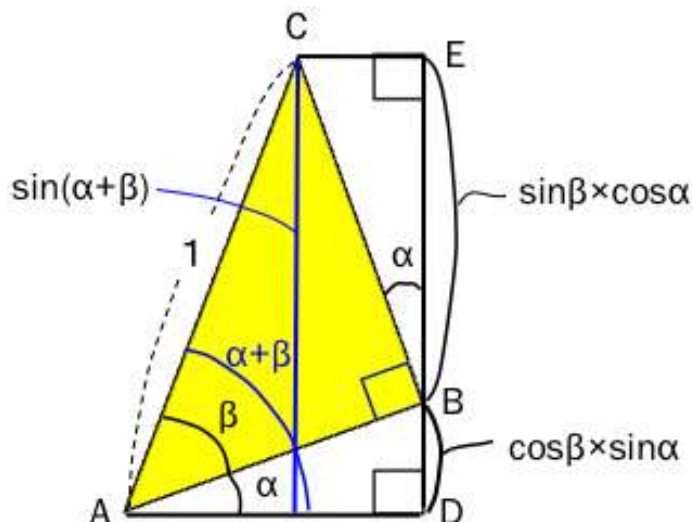


(例) $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$, $\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$,
 $\cos 90^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = 1$, $\cos 0 = 1$
→ $\cos 30^\circ$, $\cos 45^\circ$ の値は (1) の図を参照。

(3) 三角比の加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \times \cos \beta + \cos \alpha \times \sin \beta$$

これが成り立つことは下の図から分かります；



0.5 三角関数 $y=\sin x$, $y=\cos x$

関数とは、入力と出力という2つの数値の間の対応関係で、入力値を決めれば出力値が1つに定まるものです。入力や出力の値は変化するので「変数」といい、各々「入力変数」、「出力変数」と呼ばれます。

角度 θ に対して $\sin \theta$ の値は唯一つ定まるので

$$\theta \rightarrow \sin \theta$$

という対応関係は関数で、三角関数と呼びます。関数の入力変数は x , 出力変数は y とするのが一般的なので

$$x \rightarrow \sin x \quad , \quad \text{又は} \quad y=\sin x$$

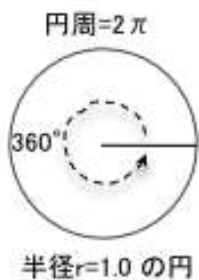
で表現します。 $y=\cos x$ も三角関数です。

0.6 角度の表し方(弧度法)

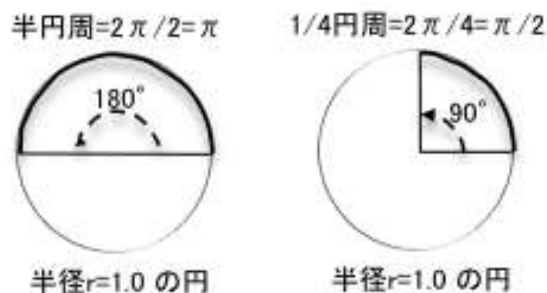
三角関数 $\sin x$ や $\cos x$ の変数 x の単位が角度の場合、他の関数（例えば2次関数など）と一緒にグラフに表現したり、計算したりすること困難です。例えば、2次関数の x 軸は数（実数）で $\sin x$ の x は角度なので同じ軸上では表現できません。また、 $x + \sin x$ という式を考えた時、 $x=30^\circ$ と「度」で表されていたら式が $30^\circ + \sin 30^\circ = 30^\circ + \sqrt{3}/2$ となりこれ以上は計算できません。

そこで、「度」に代わるものとして、半径 1.0 の円周の長さを考えます。これは長さなので数（実数）であり、他の関数の x 軸と同じように扱えます。

今、半径=1.0 の円を考えると、その 1 周は 360° で円周は $2\pi \times 1.0 = 2\pi$ です。



円周の半分、及び円周の 1/4 の場合は、次のようになります；



つまり、角度は半径 1.0 の円周の長さを使って表すことができます。

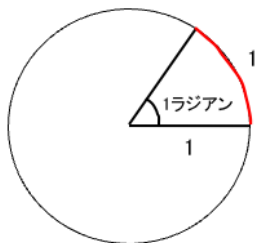
このとき、円周の長さが角度を表現することを示すため「ラジアン」という単位で呼びます。角度と円周の対応は、

$$360^\circ \Leftrightarrow 2\pi \text{ (ラジアン)}$$

$$180^\circ \Leftrightarrow \pi \text{ (ラジアン)}$$

$$90^\circ \Leftrightarrow \pi/2 \text{ (ラジアン)}$$

今度は半径 1.0 に等しい長さの円周上の弧、すなわち 1 (ラジアン) を考えます。



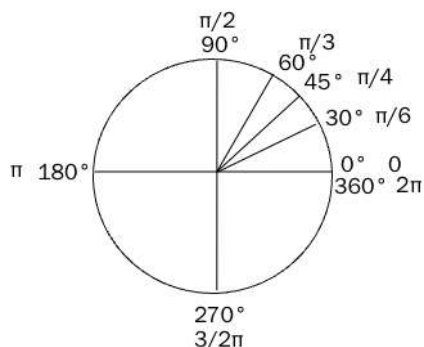
■ 1 ラジアンは何度になるのでしょうか？

$$\rightarrow 180^\circ \Leftrightarrow \pi \text{ (ラジアン) より、} 180^\circ / \pi \Leftrightarrow 1 \text{ (ラジアン)}$$

$$\text{従って、} 1 \text{ ラジアン} = 180^\circ / \pi \approx 57.3^\circ$$

円を2周した角度は $360^\circ \times 2 = 720^\circ$ ですが、これは $2\pi \times 2 = 4\pi$ (ラジアン) に対応します。

下の図は、角度と半径1の円の円周の対応例を図示したものです；



今後、角度は半径1.0の円周の長さ(単位はラジアン)を使って表すことにします。
数学の用語では、このような角度の表し方を**弧度法**と言います。

$30^\circ \Leftrightarrow \pi/6$, $45^\circ \Leftrightarrow \pi/4$, $90^\circ \Leftrightarrow \pi/2$, $180^\circ \Leftrightarrow \pi$ なので

$$\sin \pi/6 = 1/2 , \quad \sin \pi/4 = 1/\sqrt{2} ,$$

$$\sin \pi/2 = 1 , \quad \sin \pi = 0$$

$$\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2 , \quad \cos \pi/4 = 1/\sqrt{2} ,$$

$$\cos \pi/2 = 0 , \quad \cos \pi = -1$$

弧度法で角度を表現すると、三角関数を含む式の計算も可能となります；

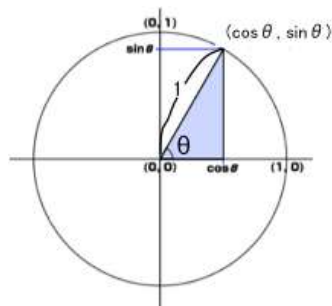
(例) $x = \pi/6$ のとき、 $x + \sin x = \pi/6 + 1/2 \doteq 3.14/6 + 1/2 = 0.523 + 0.5 = 1.023$

0.7 関数 $y = \sin x$, $y = \cos x$ のグラフ表示

半径1の円(数学の用語では「**単位円**」)に、原点からX軸に対して角度 θ の直線がこの円周と交わる点の座標は $(\cos \theta, \sin \theta)$ となります。

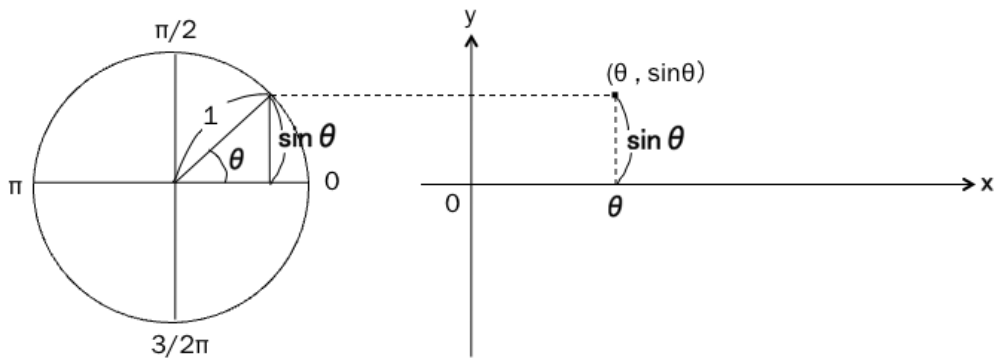
$$\sin \theta = \text{高さ} \div \text{斜辺の長さ} = \text{高さ} \div 1 = \text{高さ}$$

$$\cos \theta = \text{底辺} \div \text{斜辺の長さ} = \text{底辺} \div 1 = \text{底辺}$$

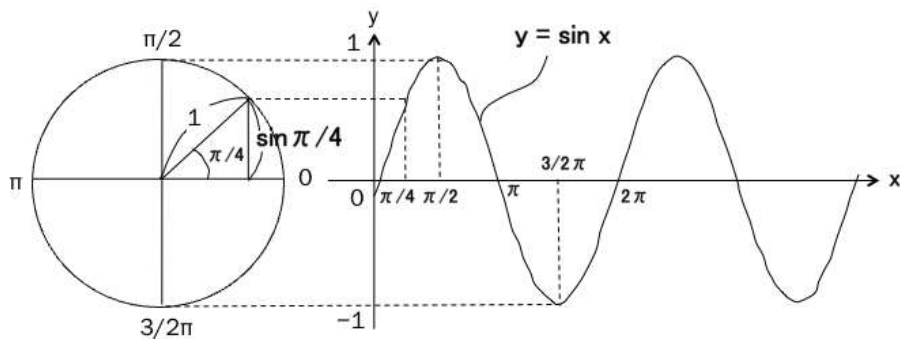


すなわち、単位円で角度 θ の三角形の高さは $\sin \theta$ です。

このとき、横軸 x に角度 θ (弧度法)、縦軸 y に $\sin \theta$ をプロットします。

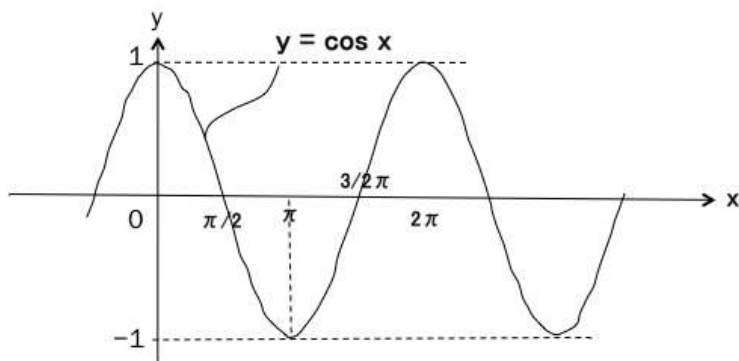


ここで、 θ の値を変えると、弧度法での $y = \sin x$ のグラフが描かれます；



$y = \sin x$ という関数は山と谷が繰り返し現れるグラフですが、これは波を表現するのに適しています。このような周期的変化を示す波を「**正弦波**」と言います。光も波なので光の数式表現は三角関数で行われます。

一方、 $\cos 0 = 1, \cos(\pi/2) = 0$ であり、 $y = \cos x$ は下のようなグラフになります。



0.8 偶関数と奇関数

$y=f(x)$ で、 $f(-x) = f(x)$ が成り立つ関数を偶関数といいます。これは y 軸に関して対称な関数です。 $y=\cos x$ は偶関数です。従って、 $\cos(-x) = \cos x$ です。

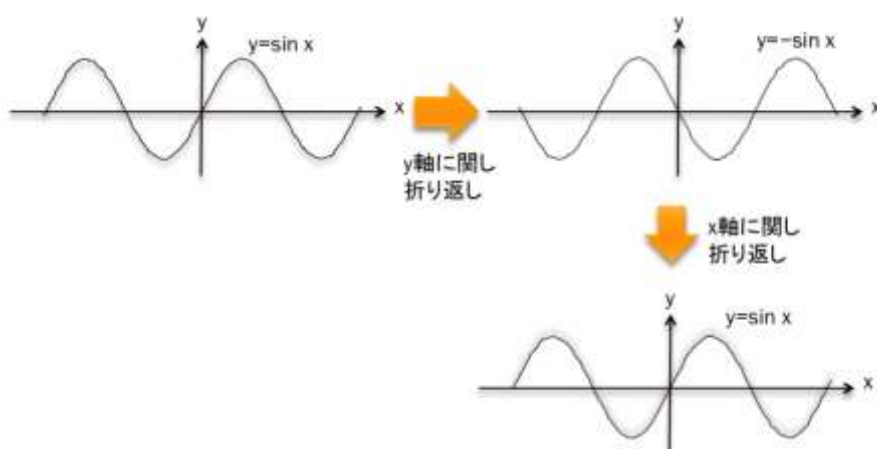
一方、 $y=f(x)$ で、 $f(-x) = -f(x)$ が成り立つ関数を奇関数といいます。これは原点に関して対称な関数(注)です。 $y=\sin x$ は奇関数です。

従って、 $\sin(-x) = -\sin x$ です。

(注) 原点に関して対称な関数とは？

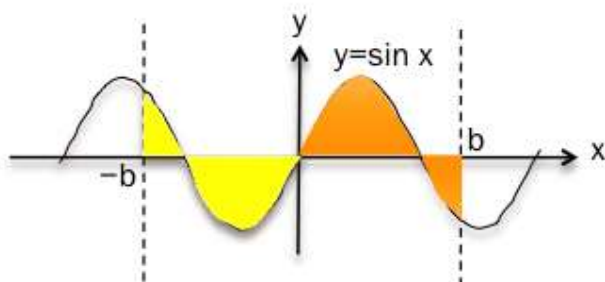
y 軸に関して折り返し、次に x 軸に関して折り返すと元の関数になります。

(例) $y=\sin x$



■原点に関して対称な関数の性質

下の図のように、原点に関して対称な関数を $-b \leq x \leq b$ の区間で考えるとその区間内では関数の値の合計=0 となります (黄色領域の値と褐色領域の値が符号の違いのみでお互いにキャンセルするため)。



■偶関数、奇関数の性質

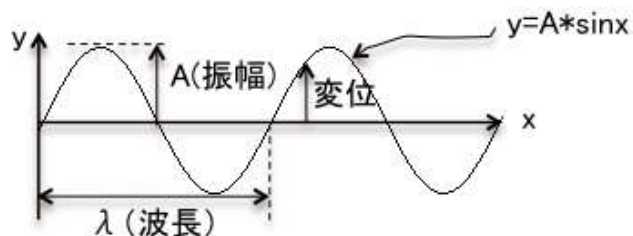
$h(x)=f(x) \times g(x)$, f を偶関数、 g を奇関数とすると、

$$h(-x) = f(-x) \times g(-x) = f(x) \times (-g(x)) = -h(x)$$

従って、偶関数 \times 奇関数 = 奇関数

0.9 正弦波の基本的な用語

$\sin x$ を A 倍した関数 $y=A*\sin x$ を考えます。



<正弦波の基本的な用語>

- ・波長 λ : 同じ形が繰り返されるひとつ分の長さが1波長です。
- ・変位(displacement) : 指定された位置での波の大きさ
- ・振幅 A : 波の振動の幅の半分の長さのことです。(振幅=最大変位)

弧度法での $y=\sin x$ のグラフ (前ページの一番上のグラフ) から分かるように、弧度法では

$$\text{波長 } \lambda \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi$$

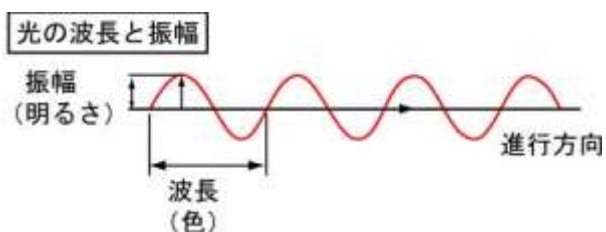
という対応になります。

これにより、「波長という長さ」を「弧度という角度」に変換できます。

0.10 光を正弦波として表現すると

光を正弦波として表現した場合、

- ・波長は光の色 (例: 青[460nm~500nm], 黄色[570nm~590nm]等)を示し、
- ・振幅は明るさ(注)を示します。(nm:ナノメートル, $1 \text{ nm} = 0.000001 \text{ mm}$)

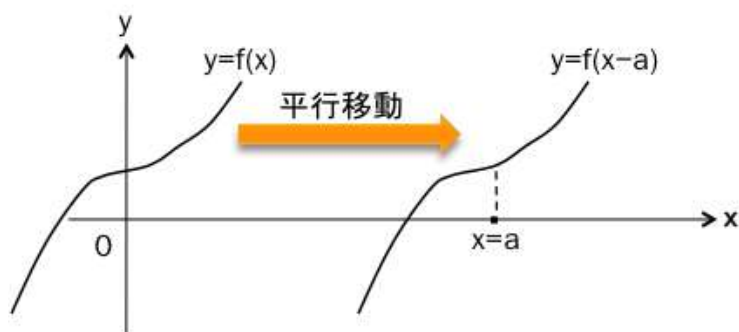


(注) この他に光のエネルギーを表すものとして**光の強度**がありますが、これは後に説明します。

0.11 正弦波の時間的推移 [重要]

まず始めに「関数の平行移動」について説明します。

下の図のように関数 $y=f(x)$ が x 軸の正の方向に a だけ平行移動した場合、移動後の関数は $x=a$ のとき元の関数の $f(0)$ と同じ値になります。従って、平行移動後の関数は $y=f(x-a)$ です。



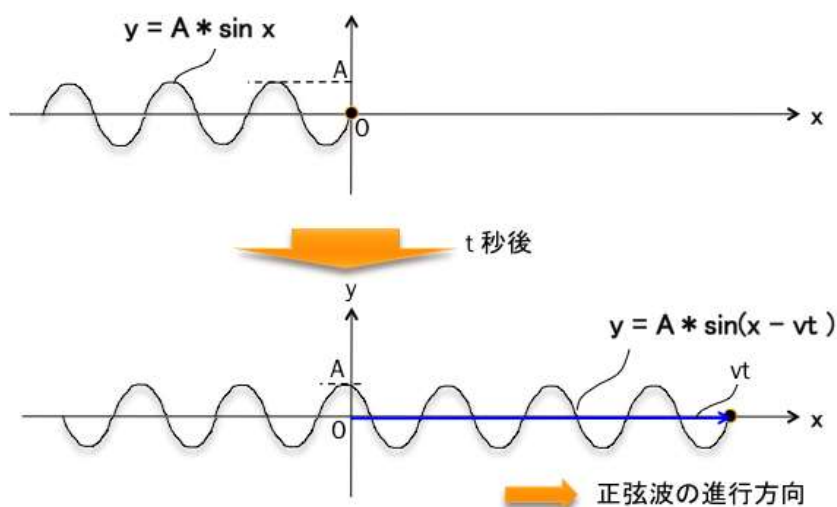
次に、正弦波の時間的推移を「関数の平行移動」で表現します。

正弦波が y 軸で振幅=0 (すなわち、 $y=0$) の状態にあるとします。このとき正弦波は $y=A * \sin x$ で表されます。

進んだ距離=速度×時間なので、今、正弦波の速度を v とするとき t 秒後には正弦波は全体として vt だけ進行方向へ移動します。このとき、移動後の正弦波は「関数の平行移動」より、

$$y = A * \sin(x - vt) \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

という三角関数で表されます。



x 軸は正弦波が進む距離を示しています。これを三角関数の計算に便利な弧度法に変換すると、「波長 $\lambda \Leftrightarrow 2\pi$ 」という対応なので、①式は

$$y = A * \sin\{(2\pi/\lambda)*(x - vt)\} \dots\dots ②$$

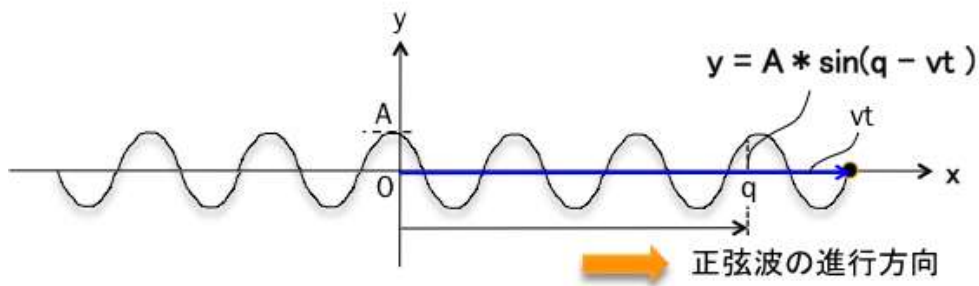
となります。

このとき、 $x=q$ の地点での変位 (注) は、②式で $x=q$ とすることにより、

$$A * \sin\{(2\pi/\lambda)*(q - vt)\} \dots\dots ③$$

となります。

(注)「変位」の説明は、0.8 節を参照。



③により、開口で $y=0$ となって到達した正弦波が t 秒後に長さ q だけ進んだ位置の振幅が求められました。

次に、正弦波が y 軸で振幅 $\neq 0$ (すなわち、 $y \neq 0$) の状態のときを考えます。すなわち、次頁の図のように、 x 軸の原点から $-\alpha$ だけ移動したところで振幅 $=0$ (すなわち、 $y=0$) の状態を考えます。→この α を初期位相と言います。

このとき正弦波は「関数の平行移動」より

$$y = A * \sin(x - (-\alpha)) = A * \sin(x + \alpha)$$

で表されます。

今、正弦波の速度を v とするとき t 秒後には正弦波は全体として vt だけ進行方向へ移動します。

このとき、移動後の正弦波は「関数の平行移動」より

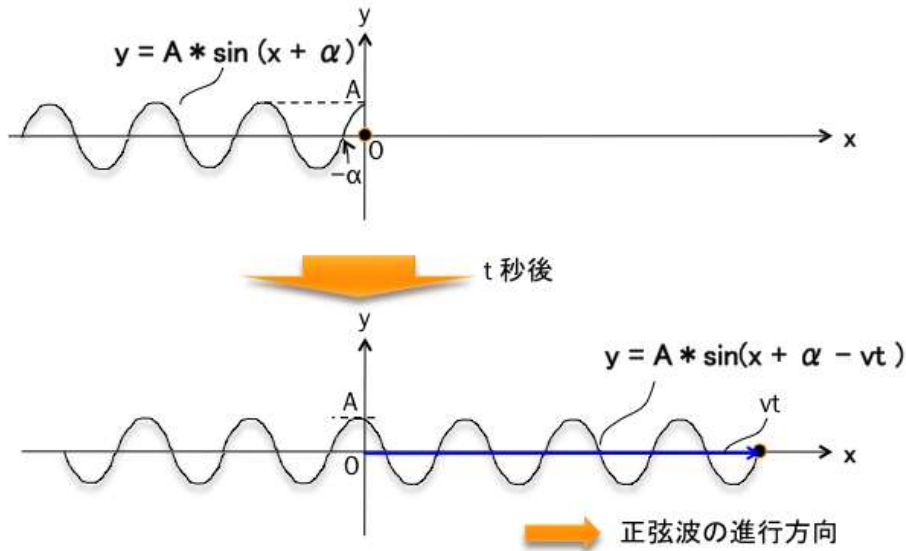
$$y = A * \sin(x + \alpha - vt) \dots\dots ④$$

という三角関数で表されます。

弧度法で表現すると

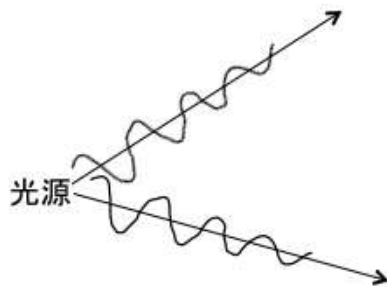
$$y = A * \sin\{(2\pi/\lambda) * (x + \alpha - vt)\} \dots \textcircled{4}'$$

となります。



0.12 光源からの距離による光の明るさの変化

光は光源から3次元に広がりますが、その振幅 A (明るさ) は距離に r に反比例します (「光源から離れるほど振幅が小さくなり光は暗くなる」というあたりまえのことを述べただけです)。



従って、光源の振幅を A とすると、光源から r だけ離れた地点での光の変位は

$$y = (A/r) * \sin(r - ct) \quad (c \text{ は光の速度}) \dots \textcircled{5}$$

で表されます。

弧度法で表現すると、

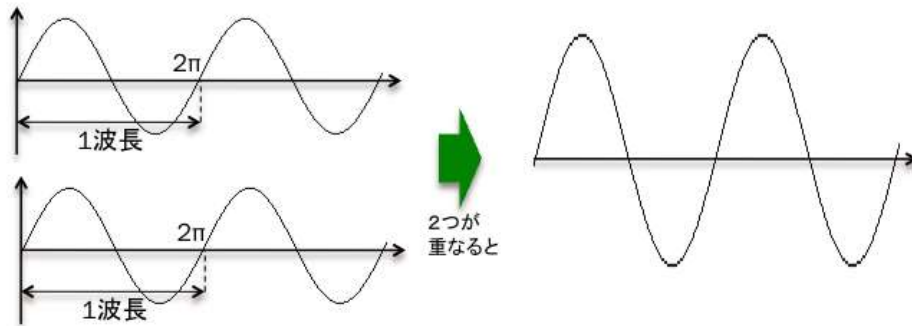
$$y = (A/r) * \sin\{(2\pi/\lambda) * (r - vt)\} \dots \textcircled{5}'$$

となります。

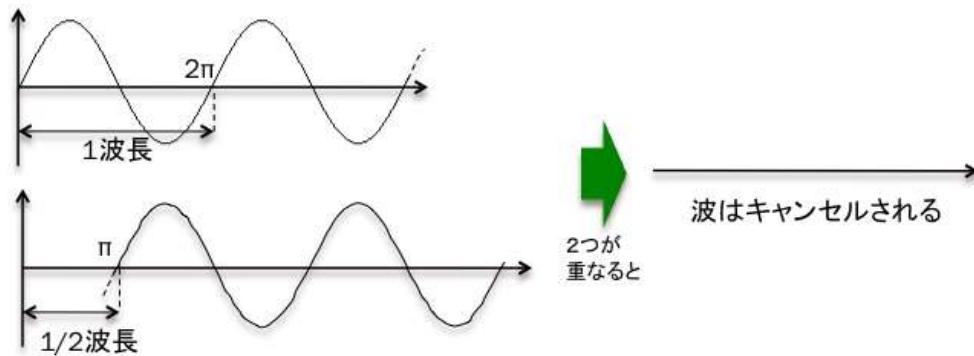
0.13 正弦波の合成

正弦波の合成は位相差により強められたり弱められたりします。

① 位相差がない場合、2つの波は強め合います。



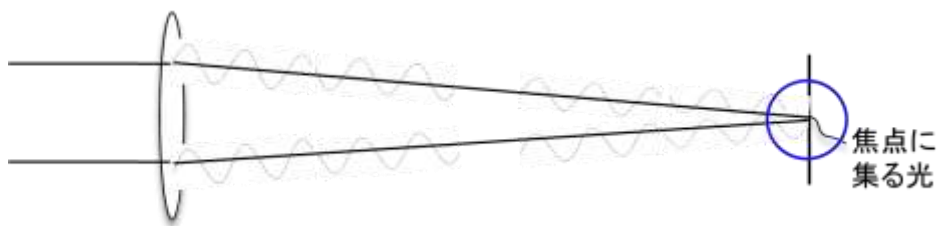
② 位相差が $\lambda/2$ の場合、2つの波はお互いにキャンセルされます。



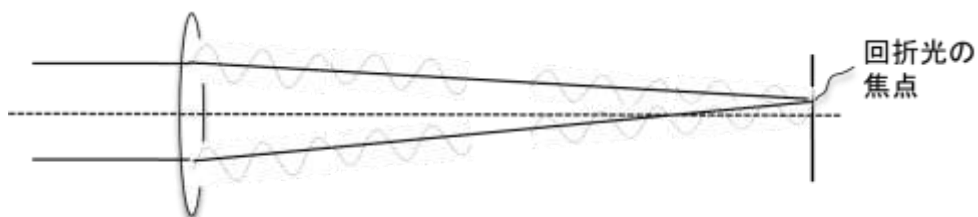
③ 位相差が①と②の間の場合は、合成された正弦波の振幅は弱められます。

■対物レンズを通過した光の合成

焦点に集まる光には位相差がないので、その合成は強められます。



焦点付近に集まる回折光は進む距離の差から位相差が生じ、その合成は弱められます。



0. 14 近似式及び三角関数の級数展開

本資料で使用するものは下記です；

■三角関数の級数展開

$$\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \dots$$

ここで、 $n!=1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ です ($2!=1 \times 2$ 、 $4!=1 \times 2 \times 3 \times 4$ など)。

証明は省略します。

$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \dots$$

特に、 x が非常に小さいとき、 $\sin x \doteq x$

これも証明は省略します。

■二項式の近似

p が小さいとき、 $(1 - p)^n \doteq 1 - n * p$

(例) $p=0.06$, $n=2$ のとき、 $(1 - 0.06)^2 = 0.8836$ 、 $1 - 2 * 0.06 = 0.88$

$p=0.06$, $n=1/2$ のとき、 $(1 - 0.06)^{1/2} = 0.9695$ 、 $1 - (1/2) * 0.06 = 0.97$

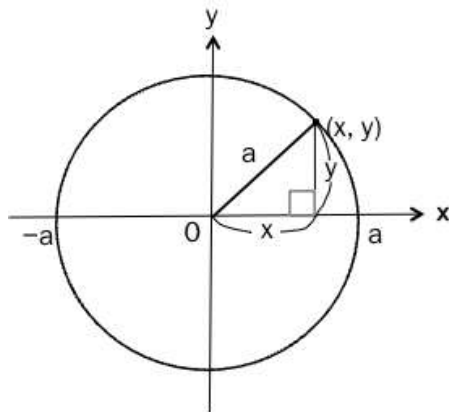
証明は省略します。

0. 15 円の方程式について

半径 a の円周上の点を (x, y) とすると、ピタゴラスの定理から

$$x^2 + y^2 = a^2$$

が成立します。これを半径 a の円の方程式と言います。



0.16 シグマ(Σ)と積分(\int)

(1) 離散と連続

離散とは、とびとびの状態番号が付けられる。

(例) 集合 $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ は離散集合です。

連続とは、つながって切れ目のない状態で番号はつけられない。

(例) $0 \leq x \leq 1$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ の集合 (\mathbb{R} は実数)

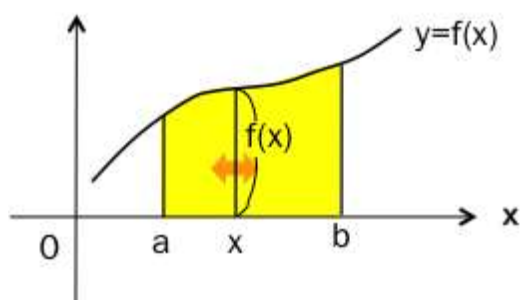
(2) シグマ (Σ) と積分 (\int)

■シグマ (Σ) は、離散的な対象を加えるときに使用。

(例) $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \Sigma a_k$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$)

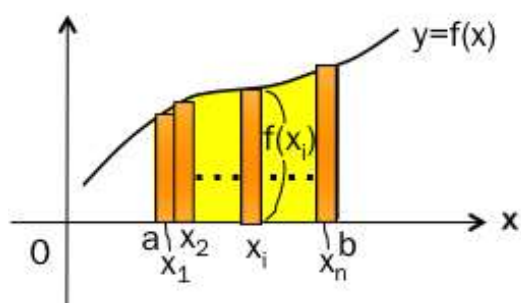
■積分 (\int) は、連続的な対象を加えるときに使用。

(例) 下の図で x が $a \leq x \leq b$ を連続的に変化するとき $f(x)$ の和は黄色い領域の面積になります。



これを求めるためには、区間 $[a, b]$ を細かく細分してそれを Δx_i ($i=1, 2, \dots, n$) とします。

このとき細分化された長方形の面積は $f(x_i) \times \Delta x_i$ となります。



すると、黄色い領域の面積の近似値は、細分化された長方形の和

$$\Sigma (f(x_i) \times \Delta x_i) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

となります。

ここで、細分化 Δx_i を小さくしていくと

$$\Sigma (f(x_i) \times \Delta x_i)$$

は黄色い領域の正確な面積に近づきます。

$\Sigma (f(x_i) \times \Delta x_i)$ において、細分化 Δx_i を限りなく小さくしたとき

Σ は連続的な和 (積分 \int) となり、 Δx_i は無限小 dx (注) となります。

すなわち、 $\Delta x_i \rightarrow 0$ のとき (\rightarrow は限りなく近づくの意味)

$$\Sigma (f(x_i) \times \Delta x_i) \rightarrow \int f(x) dx \quad (a \leq x \leq b)$$

となり、黄色の領域の面積に等しくなります。

(注) 無限小：一言で言えば、限りなく小さい変化のことです。

記号では d を使います。例えば、変数 x の無限小は dx です。

すなわち、 x を限りなく 0 に近づけたとき ($x \rightarrow 0$)、 x の値を dx で表します ($dx \neq 0$ 。 dx は限りなく 0 に近いが 0 ではない!)。

※無限小の世界でも式の関係は成立します。

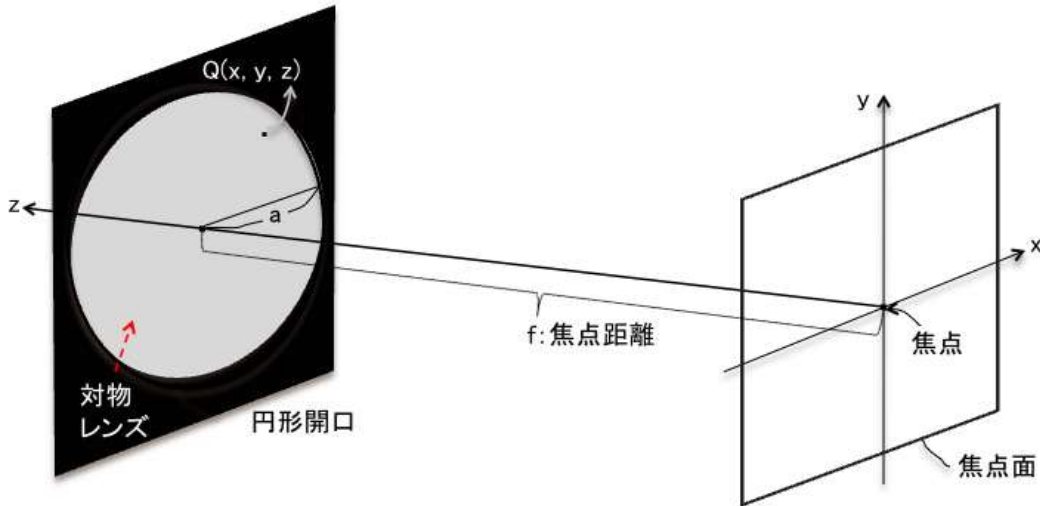
(例) $x = a * w$ (a は定数) とするとき、 $dx = a * dw$

以上で準備は終了です。

1. エアリーの論文の内容紹介(その1;円形開口)

1.1 三次元の座標系(x, y, z)の導入

半径 $r=a$ の対物レンズの焦点距離を f とし、焦点面を x, y 座標、それに垂直な軸を z 軸とします。対物レンズ上の任意の点の座標を $Q(x, y, z)$ とします。

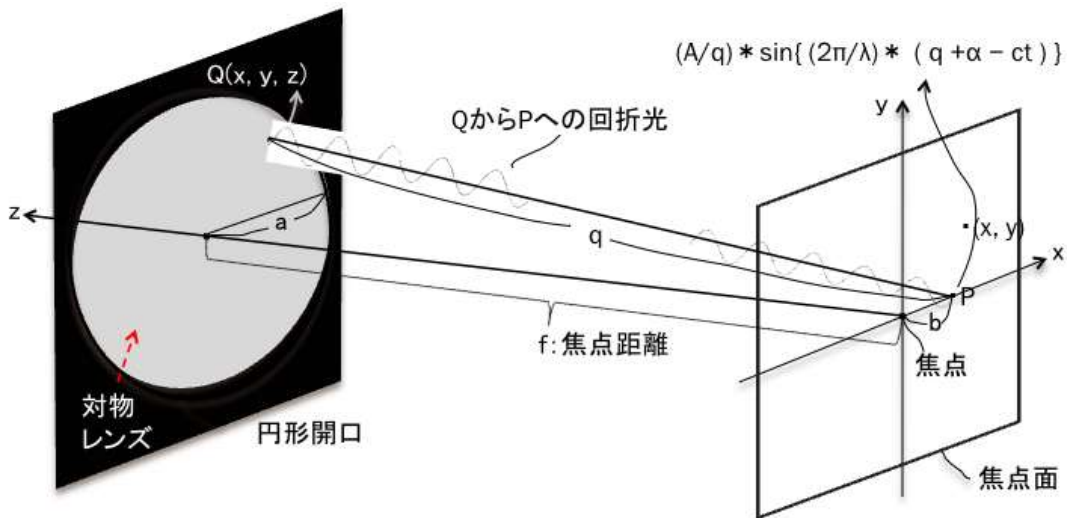


1.2 焦点近傍の点 P への回折光の数式表現

焦点面の x 軸方向に b だけ移動した焦点近傍の点を P とし、対物レンズ上の任意の点 $Q(x, y, z)$ との距離を q とします。点 $Q(x, y, z)$ での光の振幅を A 、位相を α とするとき、 Q から P への回折光の点 P での変位は、0. 11と0. 12節の④'、⑤'から

$$(A/q) * \sin\{ (2\pi/\lambda) * (q + \alpha - ct) \} \dots \textcircled{6}$$

となります (c は光の速度)。



天体望遠鏡の場合、 $f \gg a$ （焦点距離 f は口径の半径 a に比べて十分大きい）ので

$$q \doteq f$$

として、 (A/q) は (A/f) に置換えることができます（光源からの距離に差が小さいならば明るさ（振幅）は殆ど変わらないので）。

すなわち、⑥は

$$(A/f) * \sin\{(2\pi/\lambda) * (q + \alpha - ct)\} \dots \textcircled{7}$$

とすることができます（注）。

（注）ここで、 \sin の中の q は f に置換えることはできません。その理由は q には $(2\pi/\lambda)$ という非常に大きな数 (10^7) が掛けられていて誤差が無視できなくなるからです。（ $\lambda = 500\text{nm} = 500 * 10^{-9}\text{m}$ とすると、
 $2\pi/\lambda = 2 * 3.14/500 * 10^9 = 1.26 * 10^7$ ）

次に、 q を他の変数 f, b, x の近似式で表すと、

$$q \doteq f - bx/f$$

となることが示されます。例えば、点 P が焦点ならば $b=0$ なので $q=f$ です。

点 Q が対物レンズの中心ならば $x=0$ なので $q=f$ です。点 Q が対物レンズの端 $x=-a$ ならば、 $q = f - b(-a)/f = f + ba/f$ （すなわち、焦点距離 f よりも長くなる）となります。また、点 Q が対物レンズの反対側の端 $x=a$ ならば、 $q = f - ba/f$ （すなわち、焦点距離 f よりも短くなる）となります。

$q \doteq f - bx/f$ が成り立つことの証明は**付録1**を参照して下さい。

従って、対物レンズ上の点 $Q(x, y, z)$ から焦点近傍の点 $P(b, 0, 0)$ への

回折光の点 P での変位は、⑦式で $q = f - bx/f$ を代入すると

$$(A/f) * \sin\{(2\pi/\lambda)(f - bx/f + \alpha - ct)\} \dots \textcircled{8}$$

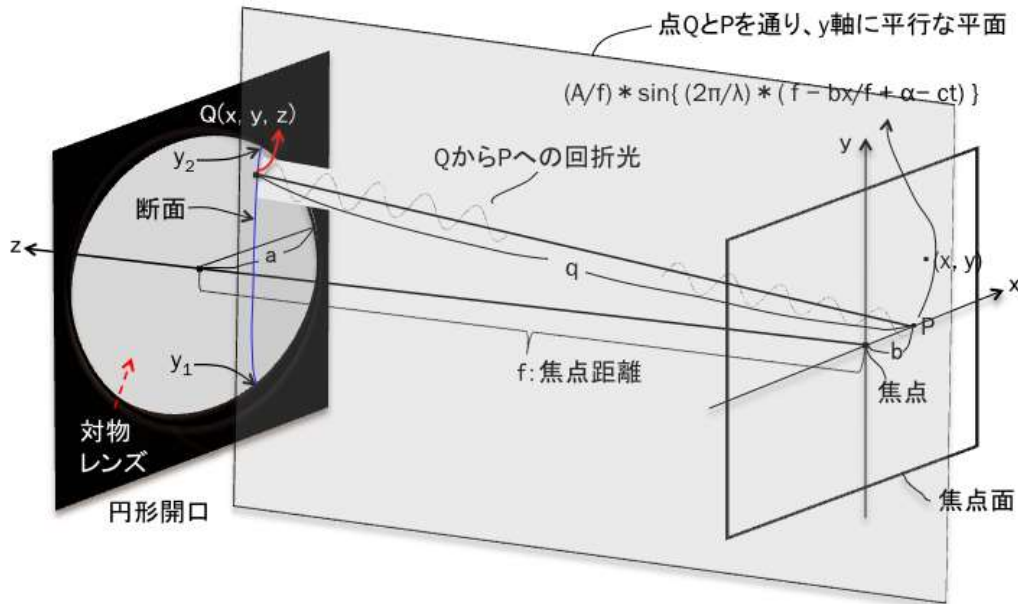
となります。⑧式は $Q(x, y, z)$ の y 座標に関係しないことに注意。

この性質を利用して、次の頁では「対物レンズの点 Q を通り、 y 軸に平行な断面から点 P に集る回折光」の変位合計を求めます。

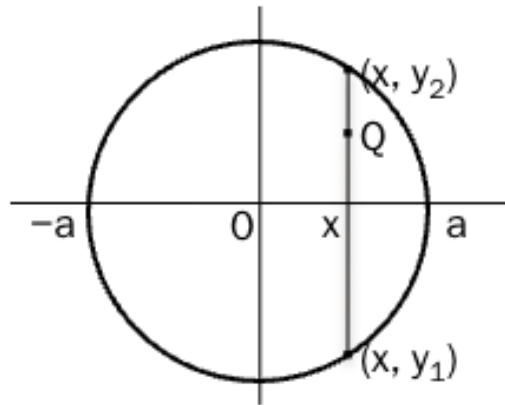
1.3 対物レンズの y 軸に平行な断面から点 P に集る回折光

ここで、点 Q と P を通り、y 軸に平行な平面による断面をしてみます。

y_1, y_2 は、Q を通る断面が対物レンズの下端、上端と交わるときの y の値です。



対物レンズの面を図で表現すると、下の図のようになります。Q を通る断面は y 軸に平行な直線となり、 $(x, y_1), (x, y_2)$ は円周上の座標です。



$(x, y_1), (x, y_2)$ は半径 a の円周上にあるので円の方程式 $x^2 + y^2 = a^2$ を満たします。

すなわち、 $x^2 + y_1^2 = a^2, x^2 + y_2^2 = a^2$

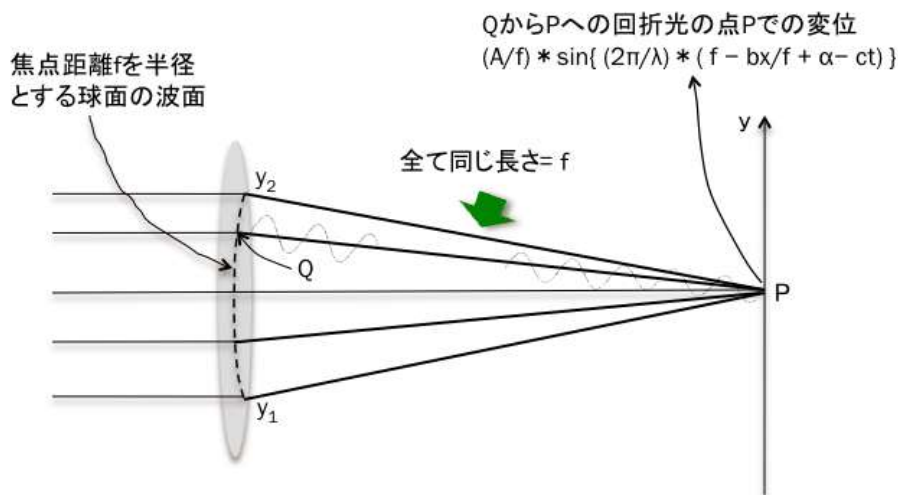
y について解くと、 $y_1 = \pm(a^2 - x^2)^{1/2}, y_2 = \pm(a^2 - x^2)^{1/2}$

$y_2 > y_1$ なので $y_2 = +(a^2 - x^2)^{1/2}, y_1 = -(a^2 - x^2)^{1/2}$

従って、 $y_2 - y_1 = +(a^2 - x^2)^{1/2} - \{ -(a^2 - x^2)^{1/2} \} = 2(a^2 - x^2)^{1/2}$

すなわち、 $y_2 - y_1 = 2(a^2 - x^2)^{1/2} \dots \textcircled{9}$

一方、下の図は点 Q を通り y 軸に平行な平面による断面を横から見たものです。ここで注目すべきことは、 y_1 から y_2 までの P に集る回折光が進む長さは全て同じ f です。



すなわち、 y_1 から y_2 までの各点から P に集る回折光の P での変位は全て $(A/f) * \sin\{(2\pi/\lambda)(f - bx/f + \alpha - ct)\}$ に等しくなります。

従って、 y_1 から y_2 までの各点から P に集る回折光の P での変位の合計は

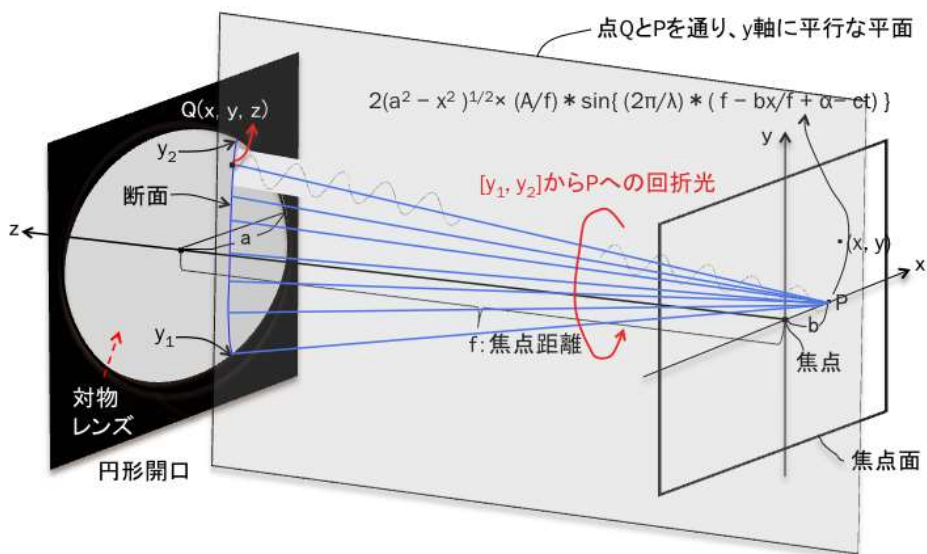
$$(y_2 - y_1) \times (A/f) * \sin\{(2\pi/\lambda)(f - bx/f + \alpha - ct)\}$$

となります。一方、⑨式より、 $y_2 - y_1 = 2(a^2 - x^2)^{1/2}$ なので

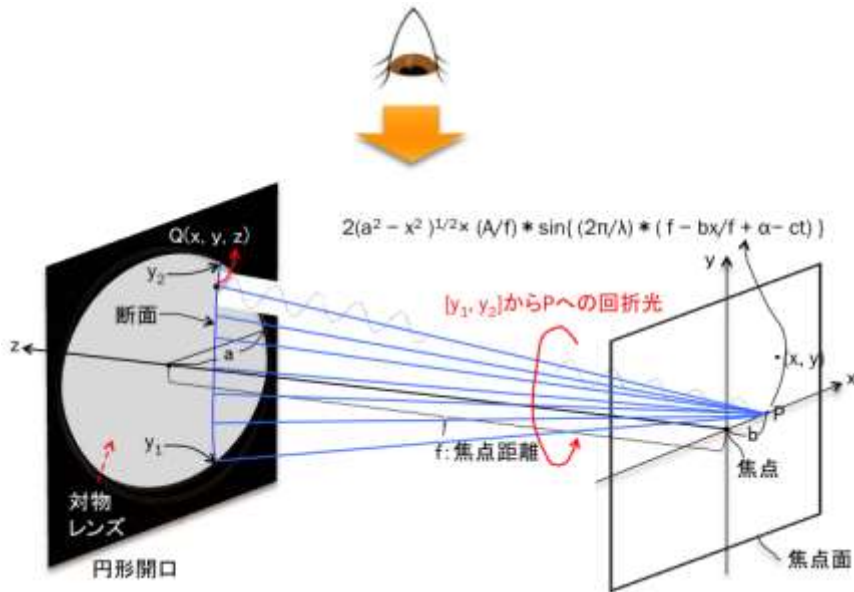
y_1 から y_2 までの P に集る回折光の P での変位の合計は

$$2(a^2 - x^2)^{1/2} \times (A/f) * \sin\{(2\pi/\lambda)(f - bx/f + \alpha - ct)\} \dots \textcircled{10}$$

となります。これを図示すると、下の図のようになります。

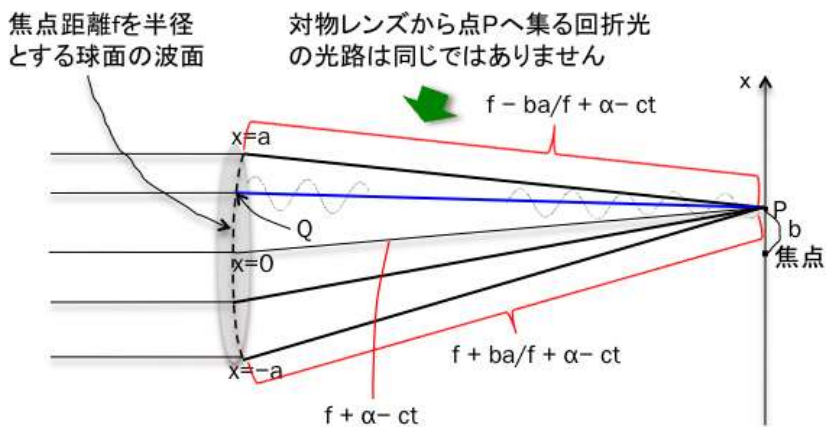


1.4 対物レンズの y 軸に平行な断面から点 P に集る回折光を真上から見る
 今度は、真上から眺めてみます。



このとき、対物レンズから焦点面の点 P への回折光は下の図のように見えるはず
 です。対物レンズの各点から P へ集る回折光の光路は同じ長さではありません。
 ⑩式の中の $(f - bx/f + \alpha - ct)$ は P へ集まる回折光の進む距離ですが、この距離
 は $(f + \alpha - ct)$ という共通部分と、 $- bx/f$ という変動部分があります。変動部分は、各
 回折光の**光路差**を意味します。

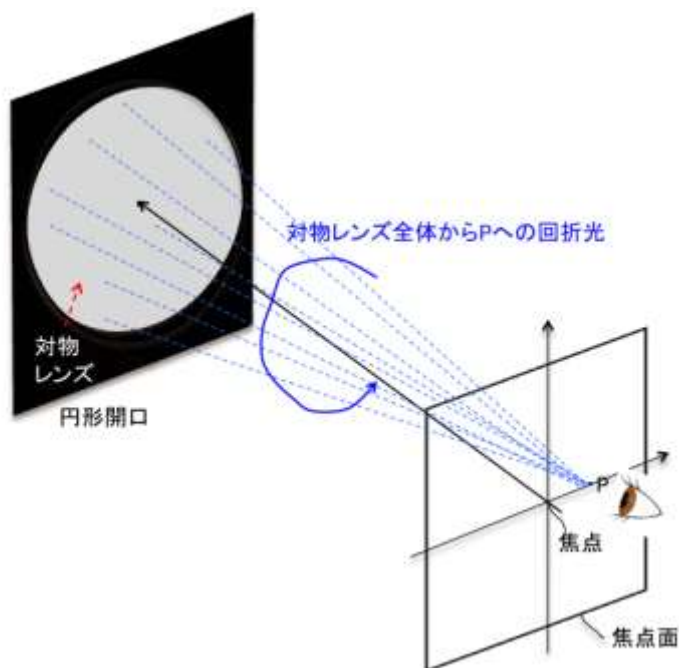
例えば、下の図で対物レンズの中心から P への回折光の進む距離は $x=0$ より
 $(f + \alpha - ct)$ です。対物レンズの端 $x=-a$ から P への回折光の進む距離は
 $(f - b(-a)/f + \alpha - ct) = (f + ba/f + \alpha - ct)$ と ba/f だけ長くなります。
 対物レンズの端 $x=a$ から P への回折光の進む距離は $(f - ba/f + \alpha - ct)$ と
 ba/f だけ短くなります(下図を参照)。



このように x 軸方向に沿って回折光に**光路差(=±bx/f)**が生じることにより、それらの合成の振幅(光の明るさ)は変化します(0. 13節 正弦波の合成)。これが回折像に明暗が生じる理由です。しかし、明暗の焦点からの位置や明るさを正確に求めるには、式による表現が必要です。

1. 5 対物レンズ全体から点 P に集る回折光

1. 3、1. 4節では、対物レンズの断面から P に集る回折光を考えましたが今度は対物レンズ全体からの回折光を考えます。



1. 3節で求めた

$$2(a^2 - x^2)^{1/2} \times (A/f) * \sin\{ (2\pi/\lambda)(f - bx/f + \alpha - ct) \} \dots \textcircled{10}$$

は、点 Q を通る縦のラインから点 P への回折光全体の点 P での変位合計でした。

対物レンズ全体から点 P に集る回折光全体の変位合計は、点 Q を通る縦のラインを x 軸に沿って -a から a まで**連続的に**変化させたときの⑩式の値の和、すなわち⑩式の x に関する積分(∫)で求められます(積分は0. 16節を参照)；

$$\int 2(a^2 - x^2)^{1/2} \times (A/f) * \sin\{ (2\pi/\lambda)(f - bx/f + \alpha - ct) \} dx \dots \textcircled{11}$$

(但し、積分の範囲は、 $-a \leq x \leq a$)

⑪を解くために式を変形します。

(A/f)は定数なので、積分記号の外に出せます；

$$\int 2(a^2 - x^2)^{1/2} \times (A/f) * \sin\{(2\pi/\lambda)(f - bx/f + \alpha - ct)\} dx \\ = 2(A/f) * \int (a^2 - x^2)^{1/2} * \sin\{(2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct - bx/f)\} dx \cdots \textcircled{12}$$

ここで積分記号の中の式

$$\sin\{(2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct - bx/f)\}$$

に注目します。

ここで、(f + \alpha - ct - bx/f) は P へ集まる回折光の進む距離ですが、この距離は(f + \alpha - ct)という**共通な光路分**と、- bx/f という b や x の値により変化する**光路差分**に分かれます。**この「回折光の光路差分」が回折像を生み出します。**

そこで、**共通な光路分**を M、**光路差分**を N と置きます。

すなわち、M = f + \alpha - ct, N = - bx/f として

三角関数の加法定理(0. 4節の(3)を参照)を適用すると、

積分記号の中の式

$$\sin\{(2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct - bx/f)\}$$

は次のように **M と N の項の積と和に分解**できます；

$$\sin\{(2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct - bx/f)\} \\ = \sin\{(2\pi/\lambda)(M + N)\} \\ = \sin\{(2\pi/\lambda)M + (2\pi/\lambda)N\} \\ = \underbrace{\sin\{(2\pi/\lambda)M\}}_{M \text{ の項}} * \underbrace{\cos\{(2\pi/\lambda)N\}}_{N \text{ の項}} + \underbrace{\cos\{(2\pi/\lambda)M\}}_{M \text{ の項}} * \underbrace{\sin\{(2\pi/\lambda)N\}}_{N \text{ の項}}$$

$$= \sin\{(2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct)\} * \cos\{(2\pi/\lambda)(-bx/f)\} \\ + \cos\{(2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct)\} * \sin\{(2\pi/\lambda)(-bx/f)\}$$

cos は偶関数、sin は奇関数(偶関数、奇関数は0. 2. 8節参照)なので

$$= \sin\{(2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct)\} * \cos\{(2\pi/\lambda)(bx/f)\} \\ - \cos\{(2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct)\} * \sin\{(2\pi/\lambda)(bx/f)\}$$

従って、⑫式は

$$2(A/f) * \int (a^2 - x^2)^{1/2} * \sin\{(2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct - bx/f)\} dx = \\ 2(A/f) * \sin\{(2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct)\} * \int (a^2 - x^2)^{1/2} * \cos\{(2\pi/\lambda)(bx/f)\} dx - \\ 2(A/f) * \cos\{(2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct)\} * \int (a^2 - x^2)^{1/2} * \sin\{(2\pi/\lambda)(bx/f)\} dx \cdots \textcircled{13}$$

となります。

すなわち、対物レンズ全体から P へ向かう回折光が進む共通な光路分を積分計算の外に出すことができました。i.e. **積分計算は光路差分でのみ考えればよい。**

⑬式は一見複雑ですが、**驚くべきことに**

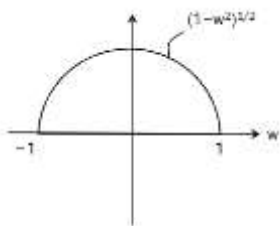
$$\int (a^2 - x^2)^{1/2} * \sin\{ (2\pi / \lambda)(bx/f) \} dx = 0 \quad \dots \textcircled{14}$$

が成立することが示せます。

エアリーの論文では、これが成立することについて、

「⑭は明らかに成立します。その理由は全ての正の値は、それと絶対値が等しい負の値により相殺されるからです。」と述べてあります。

⑭の積分の中の式の $(1-w^2)^{1/2}$ のグラフは円周の上半分なので y 軸に関して対称な関数(偶関数)です(偶関数、奇関数については、0. 8節を参照)。



また、 $\sin\{ (2\pi / \lambda)(bx/f) \}$ は原点に関して対象な関数です(すなわち、奇関数)。

従って、0. 8節より、 $(a^2 - x^2)^{1/2} * \sin\{ (2\pi / \lambda)(bx/f) \}$ は、原点に関して対称な関数です(偶関数×奇関数=奇関数)。

原点に関して対称な関数を $-a \leq x \leq a$ の区間で考えると0. 2. 8節より

その区間内では関数の値の合計=0

となります。

その区間内での $(a^2 - x^2)^{1/2} * \sin\{ (2\pi / \lambda)(bx/f) \}$ の値の合計とは、

$$\int (a^2 - x^2)^{1/2} * \sin\{ (2\pi / \lambda)(bx/f) \} dx$$

のことです。

以上から、

$$\int (a^2 - x^2)^{1/2} * \sin\{ (2\pi / \lambda)(bx/f) \} dx = 0 \quad \dots \textcircled{14}$$

が示されました。

従って、⑬式は

$$2(A/f) * \int (a^2 - x^2)^{1/2} * \sin\{ (2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct - bx/f) \} dx =$$

$$2(A/f) * \sin\{ (2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct) \} * \int (a^2 - x^2)^{1/2} * \cos\{ (2\pi/\lambda)(bx/f) \} dx \dots \textcircled{13}'$$

となります(積分の範囲は、 $-a \leq x \leq a$)。

ここで、 $x/a=w$, $(2\pi/\lambda) * ba/f=n$ と置くと、 $-1 \leq w \leq 1$ であり、

$$nw = \{ (2\pi/\lambda) * ba/f \} * (x/a) = (2\pi/\lambda)(bx/f)$$

また、 $x=a * w$ より $dx=a * dw$ です。

従って $\textcircled{13}'$ は

$$2(A/f) * \int (a^2 - x^2)^{1/2} * \sin\{ (2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct - bx/f) \} dx =$$

$$2a^2(A/f) * \sin\{ (2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct) \} * \int \{ (1-w^2)^{1/2} * \cos nw \} dw \dots \textcircled{13}''$$

となります。(積分の範囲は、 $-1 \leq w \leq 1$)

$(1-w^2)^{1/2}$ 及び $\cos nw$ はどちらも y 軸に対して対称なので、

$\textcircled{13}''$ 式は「積分の範囲を $0 \leq w \leq 1$ 」で求めた値の 2 倍となります。

従って、

$$2(A/f) * \int (a^2 - x^2)^{1/2} * \sin\{ (2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct - bx/f) \} dx =$$

$$4a^2(A/f) * \sin\{ (2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct) \} * \int \{ (1-w^2)^{1/2} * \cos nw \} dw \dots \textcircled{15}$$

(積分の範囲は、 $0 \leq w \leq 1$)

となります。

<1. 5節のまとめ>

対物レンズ全体から点 P に集る回折光全体の位相合計は、

$$2(A/f) * \int (a^2 - x^2)^{1/2} * \sin\{ (2\pi/\lambda)(f - bx/f + \alpha - ct) \} dx \dots \textcircled{12}$$

$$= 2a^2(A/f) * \sin\{ (2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct) \} * \int \{ (1-w^2)^{1/2} * \cos nw \} dw$$

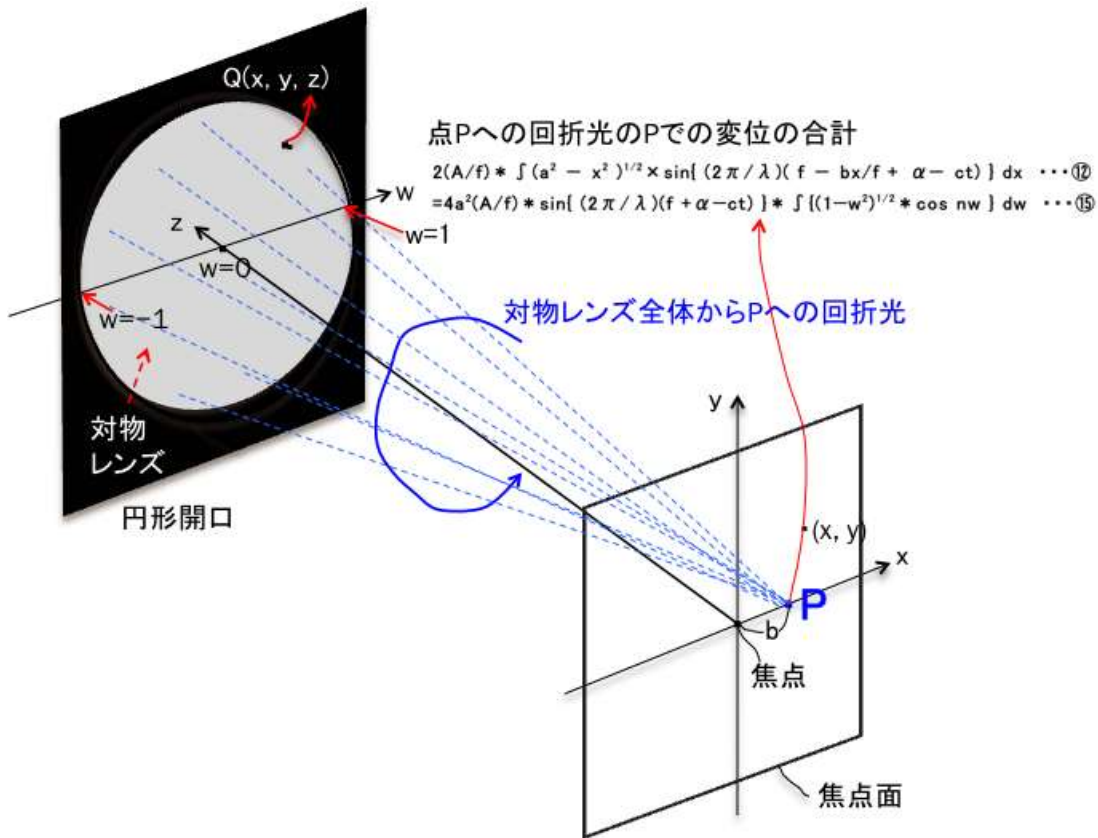
となります。(積分の範囲は、 $-1 \leq w \leq 1$)

また、積分の範囲を $0 \leq w \leq 1$ とすると、

$$2(A/f) * \int (a^2 - x^2)^{1/2} * \sin\{ (2\pi/\lambda)(f - bx/f + \alpha - ct) \} dx \dots \textcircled{12}$$

$$= 4a^2(A/f) * \sin\{ (2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct) \} * \int \{ (1-w^2)^{1/2} * \cos nw \} dw \dots \textcircled{15}$$

です。但し、 $w=x/a$, $n=(2\pi/\lambda) * ba/f$



上記の結果から、対物レンズ全体から点 P に集る回折光全体の位相合計を

求めるためには、積分 $\int \{ (1-w^2)^{1/2} * \cos nw \} dw$ の計算が重要です。

そこで次の節でこの積分の値を求めます。

1.6 積分 $\int \{(1-w^2)^{1/2} * \cos nw\} dw$ の計算

ここでは、積分 $\int \{(1-w^2)^{1/2} * \cos nw\} dw$ (積分の範囲は、 $0 \leq w \leq 1$) を求めます。

この積分を求める方法についてエアリーの論文では、2つの解法の方針が示されていますが、途中の計算は省略して結果のみが載っています。2つの解法とは、ベッセルの微分方程式を解く方法と $\cos nw$ を級数展開する方法です。

ここでは、解法の一つである「**cos nw を級数展開する方法**」について説明します。

■ 積分 $\int \{(1-w^2)^{1/2} * \cos nw\} dw$ の $\cos nw$ を級数展開する方法

$\cos nw$ を級数展開すると、0. 14節より

$$\cos nw = 1 - n^2 w^2 / 2! + n^4 w^4 / 4! - n^6 w^6 / 6! + \dots$$

従って、

$$\begin{aligned} & \int \{(1-w^2)^{1/2} * \cos nw\} dw \\ & \doteq \int \{(1-w^2)^{1/2} * [1 - n^2 w^2 / 2! + n^4 w^4 / 4! - n^6 w^6 / 6!]\} dw \\ & = \int (1-w^2)^{1/2} dw - n^2 / 2! \times \int (1-w^2)^{1/2} w^2 dw \\ & \quad + n^4 / 4! \times \int (1-w^2)^{1/2} w^4 dw - n^6 / 6! \times \int (1-w^2)^{1/2} w^6 dw \end{aligned}$$

から、

$\int (1-w^2)^{1/2} dw$ 、 $\int (1-w^2)^{1/2} w^2 dw$ 、 $\int (1-w^2)^{1/2} w^4 dw$ 、 $\int (1-w^2)^{1/2} w^6 dw$ という4つの積分(積分の範囲は、 $0 \leq w \leq 1$)を求めることに帰着します。

積分の範囲は、 $0 \leq w \leq 1$ なので、 $w = \sin \theta$ と置換すると、 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ です。各々の積分を計算すると、

$$\begin{aligned} \int (1-w^2)^{1/2} dw &= [\theta / 2 + (\sin 2 \theta) / 4] (\theta = 0, \pi/2) = \pi / 4 \\ \int (1-w^2)^{1/2} w^2 dw &= [\theta / 8 - (\sin 4 \theta) / 4] (\theta = 0, \pi/2) = \pi / 16 \\ \int (1-w^2)^{1/2} w^4 dw &= [\theta / 16 - (\sin 2 \theta) / 64 - (\sin 4 \theta) / 64 + (\sin 6 \theta) / 192] \\ &= \pi / 32 \\ \int (1-w^2)^{1/2} w^6 dw &= [(1/3072)(120 \theta - 24(\sin 4 \theta) - 3(\sin 8 \theta) - 64(\sin^3 2 \theta))] \\ &= 60 \pi / 3072 = 60 \pi / (4^3 \times 6 \times 8) \end{aligned}$$

となります(途中の計算は **付録3** を参照)。

従って、

$$\begin{aligned}
& \int \{(1-w^2)^{1/2} * \cos nw \} dw \\
& \doteq \int (1-w^2)^{1/2} dw - n^2/2! \times \int (1-w^2)^{1/2} w^2 dw \\
& \quad + n^4/4! \times \int (1-w^2)^{1/2} w^4 dw - n^6/6! \times \int (1-w^2)^{1/2} w^6 dw \\
& = \pi/4 - n^2/2! \times \pi/16 + n^4/4! \times \pi/32 - n^6/6! \times 60\pi/(4^3 \times 6 \times 8) \\
& = \pi/4 \times \{1 - n^2/(2 \times 4) + n^4/(2 \times 3 \times 32) - n^6 \times 60/(6! \times 4^2 \times 6 \times 8)\} \\
& = \pi/4 \times \{1 - n^2/(2 \times 4) + n^4/(2 \times 4^2 \times 6) - n^6 \times 60/(2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 4^2 \times 6 \times 8)\} \\
& = \pi/4 \times \{1 - n^2/(2 \times 4) + n^4/(2 \times 4^2 \times 6) - n^6/(2 \times 6 \times 4^2 \times 6 \times 8)\} \\
& = \pi/4 \times \{1 - n^2/(2 \times 4) + n^4/(2 \times 4^2 \times 6) - n^6/(2 \times 4^2 \times 6^2 \times 8)\}
\end{aligned}$$

となります。すなわち、

$$\begin{aligned}
& \int \{(1-w^2)^{1/2} * \cos nw \} dw \\
& = \pi/4 \times \{1 - n^2/(2 \times 4) + n^4/(2 \times 4^2 \times 6) - n^6/(2 \times 4^2 \times 6^2 \times 8) + \dots\} \quad \textcircled{16}
\end{aligned}$$

が成り立つことが示されました。これにより、nに数値を入力すると積分 $\int \{(1-w^2)^{1/2} * \cos nw \} dw$ の値を計算することができます。

----- (参考) -----

もう一つの解法は

$N = \int \{(1-w^2)^{1/2} * \cos nw \} dw$ とするとき、Nが線型微分方程式

$$N + (3/n) * dN/dn + d^2N/dn^2 = 0$$

の解であることを示すことです。これは、 $J=n*N$ と置いて式を変形し、

$$n^2 * d^2J/dn^2 + n * dJ/dn + (n^2-1)J = 0$$

の解であることを示します(詳細は **付録4** を参照)。

この微分方程式は、次数=1のベッセルの微分方程式と言われ、その特殊解は

$$J(n) = \sum (-1)^k * n^{(1+2k)} / (2^{(1+2k)} k!(1+k)!) \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

で与えられることが知られています。ここで、 $k=0, 1, 2, 3$ とすると、

$$J(n) = n/2 - n^3/(2^3 * 2!) + n^5/(2^5 * 2! * 3!) - n^7/(2^7 * 3! * 4!)$$

従って、

$$N = J(n)/n = 1/2 - n^2/(2^3 * 2!) + n^4/(2^5 * 2! * 3!) - n^6/(2^7 * 3! * 4!)$$

$$= 1/2 - n^2/(2^3 * 2!) + n^4/(2^5 * 2! * 3!) - n^6/(2^7 * 3! * 4!)$$

$$2N = 1 - n^2/2^3 + n^4/(2^5 * 3!) - n^6/(2^6 * 3! * 4!)$$

$$= 1 - n^2/(2 * 4) + n^4/(2 * 2^4 * 6) - n^6/(2 * 4^2 * 6^2 * 8) \quad (=2J(n)/n)$$

これでNの値が求まります。

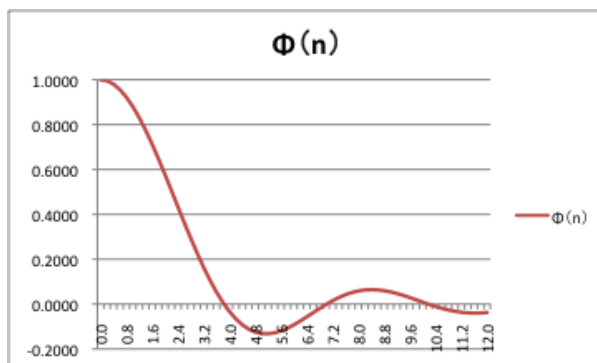
1.7 積分 $(4/\pi) \times \int \{(1-w^2)^{1/2} * \cos nw\} dw$ の値のグラフ表示

積分 $\Phi(n)=(4/\pi) \times \int \{(1-w^2)^{1/2} * \cos nw\} dw$ (積分の範囲は、 $0 \leq w \leq 1$) の値を計算すると下の表(注)のようになります ($n=(2\pi/\lambda) * ba/f$) ;

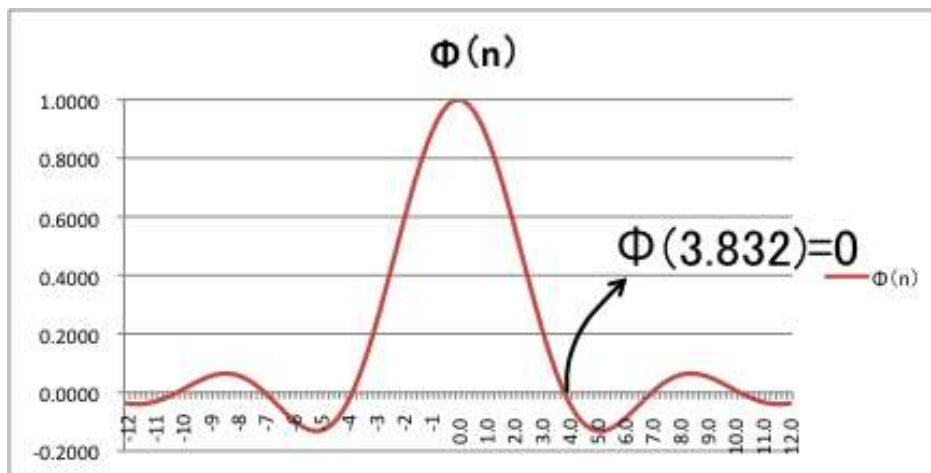
(注)この表は、⑩式よりも精度の高い近似式で計算(⑩式は $0 \leq n \leq 2.0$ で正確)

| n | $\Phi(n)$ | n | $\Phi(n)$ |
|-----|-----------|------|-----------|
| 0.0 | 1.0000 | 6.0 | -0.0922 |
| 0.2 | 0.9950 | 6.2 | -0.0751 |
| 0.4 | 0.9801 | 6.4 | -0.0568 |
| 0.6 | 0.9557 | 6.6 | -0.0379 |
| 0.8 | 0.9221 | 6.8 | -0.0192 |
| 1.0 | 0.8801 | 7.0 | -0.0013 |
| 1.2 | 0.8305 | 7.2 | 0.0151 |
| 1.4 | 0.7742 | 7.4 | 0.0296 |
| 1.6 | 0.7124 | 7.6 | 0.0419 |
| 1.8 | 0.6461 | 7.8 | 0.0516 |
| 2.0 | 0.5767 | 8.0 | 0.0587 |
| 2.2 | 0.5054 | 8.2 | 0.0629 |
| 2.4 | 0.4335 | 8.4 | 0.0645 |
| 2.6 | 0.3622 | 8.6 | 0.0634 |
| 2.8 | 0.2927 | 8.8 | 0.0600 |
| 3.0 | 0.2261 | 9.0 | 0.0545 |
| 3.2 | 0.1633 | 9.2 | 0.0473 |
| 3.4 | 0.1054 | 9.4 | 0.0387 |
| 3.6 | 0.0530 | 9.6 | 0.0291 |
| 3.8 | 0.0067 | 9.8 | 0.0190 |
| 4.0 | -0.0330 | 10.0 | 0.0087 |
| 4.2 | -0.0660 | 10.2 | -0.0013 |
| 4.4 | -0.0922 | 10.4 | -0.0107 |
| 4.6 | -0.1116 | 10.6 | -0.0191 |
| 4.8 | -0.1244 | 10.8 | -0.0263 |
| 5.0 | -0.1310 | 11.0 | -0.0321 |
| 5.2 | -0.1320 | 11.2 | -0.0364 |
| 5.4 | -0.1279 | 11.4 | -0.0390 |
| 5.6 | -0.1194 | 11.6 | -0.0400 |
| 5.8 | -0.1073 | 11.8 | -0.0394 |
| 6.0 | -0.0922 | 12.0 | -0.0372 |

これをグラフに表示すると、下の図のようになります。(積分の範囲は、 $0 \leq w \leq 1$)



積分の範囲を、 $-1 \leq w \leq 1$ とすると、 $\Phi(n)$ は下記のように $n=0$ を中心に左右対称なグラフになります。



従って、対物レンズ全体から点 P に集る回折光全体の変位合計

$$4a^2(A/f) * \sin\{ (2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct) \} * \int \{ (1-w^2)^{1/2} * \cos nw \} dw \cdots \textcircled{15}$$

の積分部分 ($\int \{ (1-w^2)^{1/2} * \cos nw \} dw$) の具体的な値が求まりました。

$\Phi(n)$ のグラフを見ると $\Phi(n)=0$ となる n が繰り返し発生しています。例えばピークから右側では $n=3.832$ が最初に 0 となります ($\Phi(3.832)=0$)。

1. 5節より $n=(2\pi/\lambda) * ba/f$ なので、これを b について解くと

$$b = n * \lambda / (2\pi) * f / a = n * \lambda / (2\pi) * 2 * f / (2a)$$

対物レンズの口径を D とすると、 $D=2a$ なので

$$\begin{aligned} b &= n * \lambda / (2\pi) * 2 * f / (2a) = 2n * \lambda / (2\pi) * f / D \\ &= 2 * 3.832 / (2 * 3.14) * \lambda * f / D \\ &= 1.22 \lambda * f / D \end{aligned}$$

となります。

望遠鏡の焦点比を F とすると、 $F=f/D$ なので上の式は

$$b = 1.22 \lambda * F$$

と表せます。これは回折像の中央の明るいディスク(エアリーディスク)の半径を求める公式となります(本資料の P.8 を参照)。

1.8 光の強度とは？

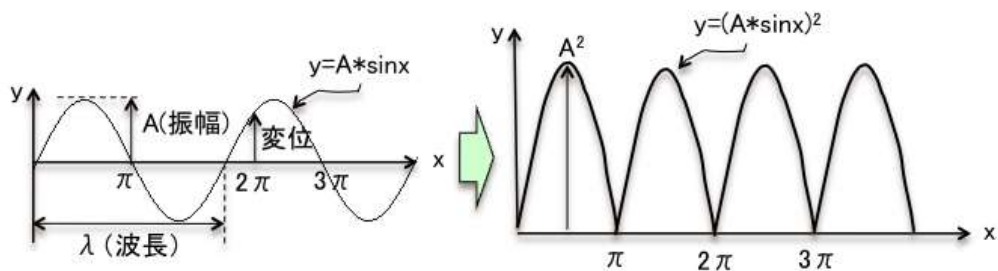
人間の眼に感じる光の強さは「光の強度」で表されます。

■光の強度とは？

- 光のエネルギー量を示すもので、変位の二乗の平均値です。
すなわち、光の平均エネルギー量を表すもので光度の基準になります。

■光を正弦波 $y=A*\sin x$ としたとき、変位の二乗は $y=(A*\sin x)^2$

そのグラフは下の右図になります。

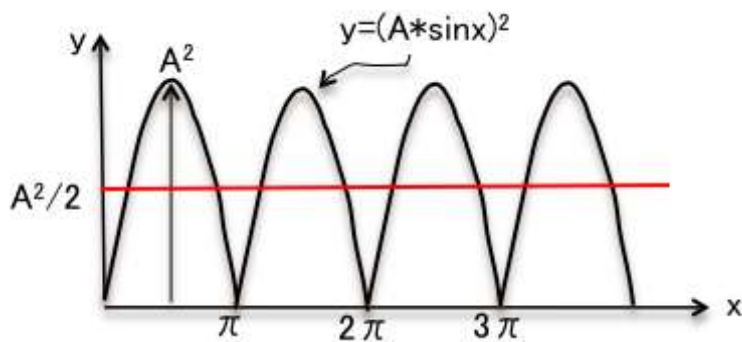


このとき、変位の二乗の平均値を求めると、

$$A^2/2$$

となります(計算は省略)。

これは下のグラフの面積の平均値を示しています。



すなわち、

$$\text{光の強度} = (\text{振幅の二乗}) / 2$$

です。

1.9 回折像の光の強度

今度は、1.7節の結果(⑮式)を元に

「対物レンズ全体から点 P に集る回折光全体の光の強度」

を求めます。

対物レンズ全体から点 P に集る回折光全体の変位合計は、⑮式から

$$\begin{aligned} & 4a^2(A/f) * \sin\{ (2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct) \} * \int \{ (1-w^2)^{1/2} * \cos nw \} dw \\ & = 4a^2(A/f) * \sin\{ (2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct) \} * (\pi/4) * \Phi(n) \\ & = \{ 4a^2(A/f) * (\pi/4) * \Phi(n) \} * \sin\{ (2\pi/\lambda)(f + \alpha - ct) \} \end{aligned}$$

となります。すなわち、振幅 = $4a^2(A/f) * (\pi/4) * \Phi(n)$

この回折光の強度を $I(n)$ とすると、

$$I(n) = (\text{振幅の二乗})/2 = \{ 4a^2(A/f) * (\pi/4) * \Phi(n) \}^2/2$$

但し、 $\Phi(n) = 1 - n^2/(2 \times 4) + n^4/(2 \times 4^2 \times 6) - n^6/(2 \times 4^2 \times 6^2 \times 8) + \dots$

$I(0) = \{ 4a^2(A/f) * (\pi/4) * \Phi(0) \}^2/2 = \{ 4a^2(A/f) * (\pi/4) \}^2/2$ なので

$$I(n) = \{ 4a^2(A/f) * (\pi/4) * \Phi(n) \}^2/2 = I(0) * \{ \Phi(n) \}^2$$

すなわち、

$$I(n) = I(0) * \{ \Phi(n) \}^2$$

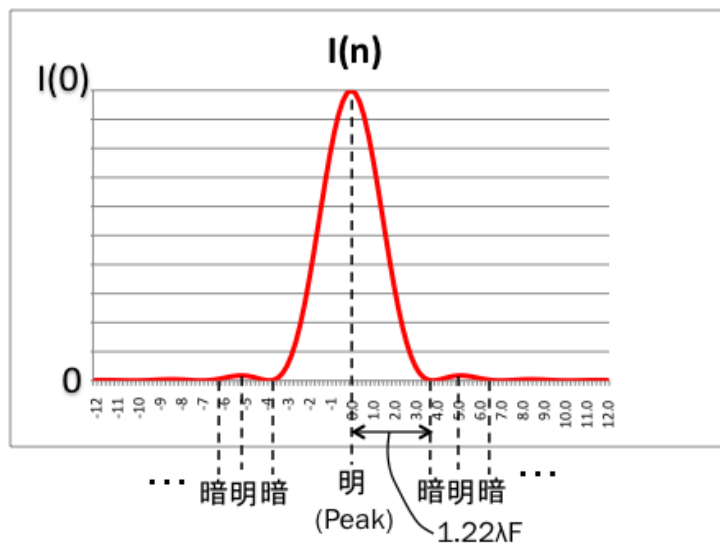
が成立します。

$\{ \Phi(n) \}^2$ の値を計算すると次頁の表のようになります。

| n | $\Phi(n)$ | $\Phi(n)^2$ |
|-------|-----------|-------------|
| -12 | -0.0372 | 0.0014 |
| -11.8 | -0.0394 | 0.0016 |
| -11.6 | -0.0400 | 0.0016 |
| -11.4 | -0.0390 | 0.0015 |
| -11.2 | -0.0364 | 0.0013 |
| -11 | -0.0321 | 0.0010 |
| -10.8 | -0.0263 | 0.0007 |
| -10.6 | -0.0191 | 0.0004 |
| -10.4 | -0.0107 | 0.0001 |
| -10.2 | -0.0013 | 0.0000 |
| -10 | 0.0087 | 0.0001 |
| -9.8 | 0.0190 | 0.0004 |
| -9.6 | 0.0291 | 0.0008 |
| -9.4 | 0.0387 | 0.0015 |
| -9.2 | 0.0473 | 0.0022 |
| -9 | 0.0545 | 0.0030 |
| -8.8 | 0.0600 | 0.0036 |
| -8.6 | 0.0634 | 0.0040 |
| -8.4 | 0.0645 | 0.0042 |
| -8.2 | 0.0629 | 0.0040 |
| -8 | 0.0587 | 0.0034 |
| -7.8 | 0.0516 | 0.0027 |
| -7.6 | 0.0419 | 0.0018 |
| -7.4 | 0.0296 | 0.0009 |
| -7.2 | 0.0151 | 0.0002 |
| -7 | -0.0013 | 0.0000 |
| -6.8 | -0.0192 | 0.0004 |
| -6.6 | -0.0379 | 0.0014 |
| -6.4 | -0.0568 | 0.0032 |
| -6.2 | -0.0751 | 0.0056 |
| -6 | -0.0922 | 0.0085 |
| -5.8 | -0.1073 | 0.0115 |
| -5.6 | -0.1194 | 0.0143 |
| -5.4 | -0.1279 | 0.0164 |
| -5.2 | -0.1320 | 0.0174 |
| -5 | -0.1310 | 0.0172 |
| -4.8 | -0.1244 | 0.0155 |
| -4.6 | -0.1116 | 0.0125 |
| -4.4 | -0.0922 | 0.0085 |
| -4.2 | -0.0660 | 0.0044 |
| -4 | -0.0330 | 0.0011 |
| -3.8 | 0.0067 | 0.0000 |
| -3.6 | 0.0530 | 0.0028 |
| -3.4 | 0.1054 | 0.0111 |
| -3.2 | 0.1633 | 0.0267 |
| -3 | 0.2261 | 0.0511 |
| -2.8 | 0.2927 | 0.0857 |
| -2.6 | 0.3622 | 0.1312 |
| -2.4 | 0.4335 | 0.1879 |
| -2.2 | 0.5054 | 0.2554 |
| -2 | 0.5767 | 0.3326 |
| -1.8 | 0.6461 | 0.4174 |
| -1.6 | 0.7124 | 0.5075 |
| -1.4 | 0.7742 | 0.5994 |
| -1.2 | 0.8305 | 0.6897 |
| -1 | 0.8801 | 0.7746 |
| -0.8 | 0.9221 | 0.8503 |
| -0.6 | 0.9557 | 0.9134 |
| -0.4 | 0.9801 | 0.9606 |
| -0.2 | 0.9950 | 0.9900 |

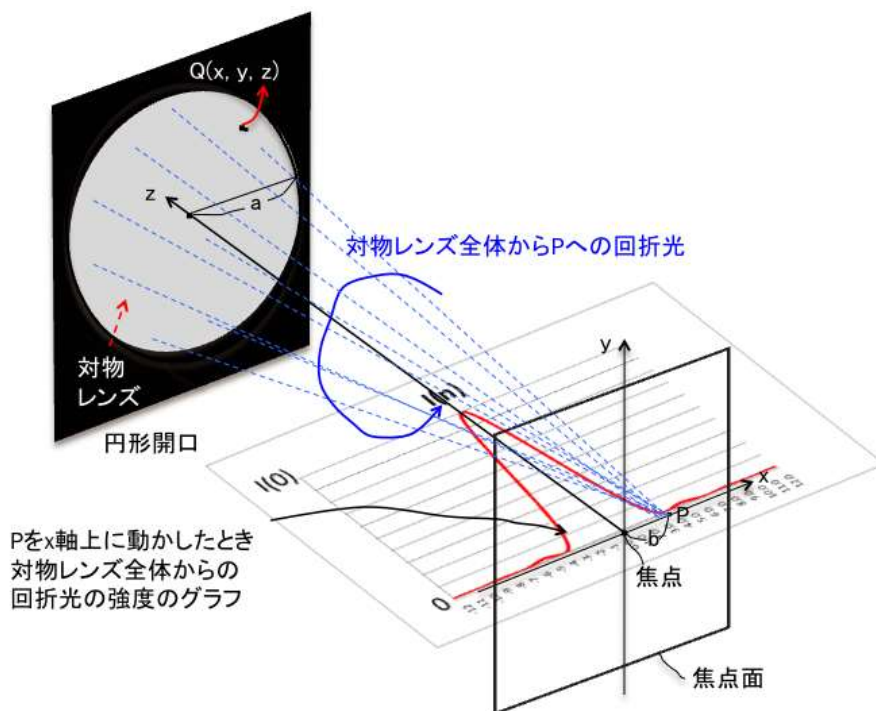
| n | $\Phi(n)$ | $\Phi(n)^2$ |
|------|-----------|-------------|
| 0.0 | 1.0000 | 1.0000 |
| 0.2 | 0.9950 | 0.9900 |
| 0.4 | 0.9801 | 0.9606 |
| 0.6 | 0.9557 | 0.9134 |
| 0.8 | 0.9221 | 0.8503 |
| 1.0 | 0.8801 | 0.7746 |
| 1.2 | 0.8305 | 0.6897 |
| 1.4 | 0.7742 | 0.5994 |
| 1.6 | 0.7124 | 0.5075 |
| 1.8 | 0.6461 | 0.4174 |
| 2.0 | 0.5767 | 0.3326 |
| 2.2 | 0.5054 | 0.2554 |
| 2.4 | 0.4335 | 0.1879 |
| 2.6 | 0.3622 | 0.1312 |
| 2.8 | 0.2927 | 0.0857 |
| 3.0 | 0.2261 | 0.0511 |
| 3.2 | 0.1633 | 0.0267 |
| 3.4 | 0.1054 | 0.0111 |
| 3.6 | 0.0530 | 0.0028 |
| 3.8 | 0.0067 | 0.0000 |
| 4.0 | -0.0330 | 0.0011 |
| 4.2 | -0.0660 | 0.0044 |
| 4.4 | -0.0922 | 0.0085 |
| 4.6 | -0.1116 | 0.0125 |
| 4.8 | -0.1244 | 0.0155 |
| 5.0 | -0.1310 | 0.0172 |
| 5.2 | -0.1320 | 0.0174 |
| 5.4 | -0.1279 | 0.0164 |
| 5.6 | -0.1194 | 0.0143 |
| 5.8 | -0.1073 | 0.0115 |
| 6.0 | -0.0922 | 0.0085 |
| 6.2 | -0.0751 | 0.0056 |
| 6.4 | -0.0568 | 0.0032 |
| 6.6 | -0.0379 | 0.0014 |
| 6.8 | -0.0192 | 0.0004 |
| 7.0 | -0.0013 | 0.0000 |
| 7.2 | 0.0151 | 0.0002 |
| 7.4 | 0.0296 | 0.0009 |
| 7.6 | 0.0419 | 0.0018 |
| 7.8 | 0.0516 | 0.0027 |
| 8.0 | 0.0587 | 0.0034 |
| 8.2 | 0.0629 | 0.0040 |
| 8.4 | 0.0645 | 0.0042 |
| 8.6 | 0.0634 | 0.0040 |
| 8.8 | 0.0600 | 0.0036 |
| 9.0 | 0.0545 | 0.0030 |
| 9.2 | 0.0473 | 0.0022 |
| 9.4 | 0.0387 | 0.0015 |
| 9.6 | 0.0291 | 0.0008 |
| 9.8 | 0.0190 | 0.0004 |
| 10.0 | 0.0087 | 0.0001 |
| 10.2 | -0.0013 | 0.0000 |
| 10.4 | -0.0107 | 0.0001 |
| 10.6 | -0.0191 | 0.0004 |
| 10.8 | -0.0263 | 0.0007 |
| 11.0 | -0.0321 | 0.0010 |
| 11.2 | -0.0364 | 0.0013 |
| 11.4 | -0.0390 | 0.0015 |
| 11.6 | -0.0400 | 0.0016 |
| 11.8 | -0.0394 | 0.0016 |
| 12.0 | -0.0372 | 0.0014 |

$\{\Phi(n)\}^2$ の値として前頁の表を使用すると、 $I(n)$ はピークの値を $I(0)$ とする次のような明暗のグラフになります。



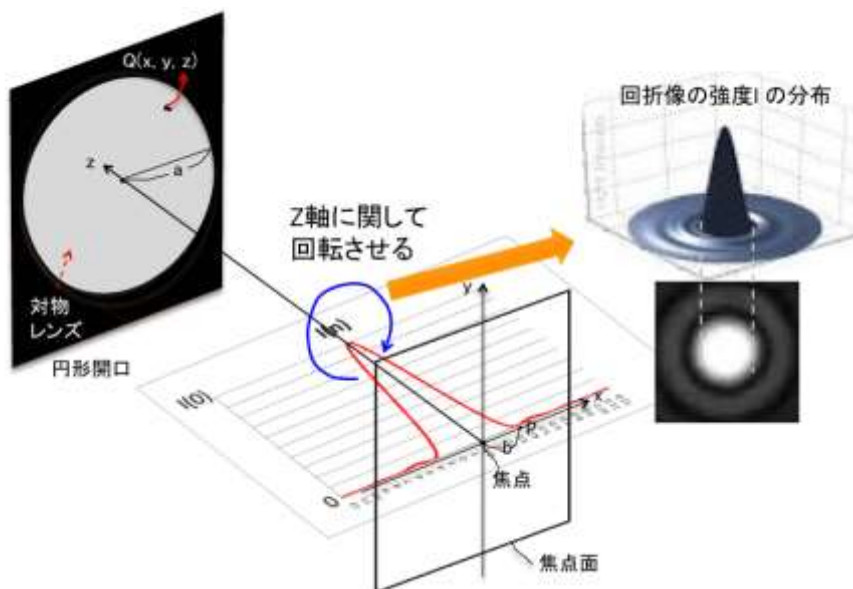
このグラフは回折像の光の強度分布を示しています。

このグラフは、これまでの座標系で z 軸を回折光の強度 I の軸とした場合、下の図のように位置付けられます。



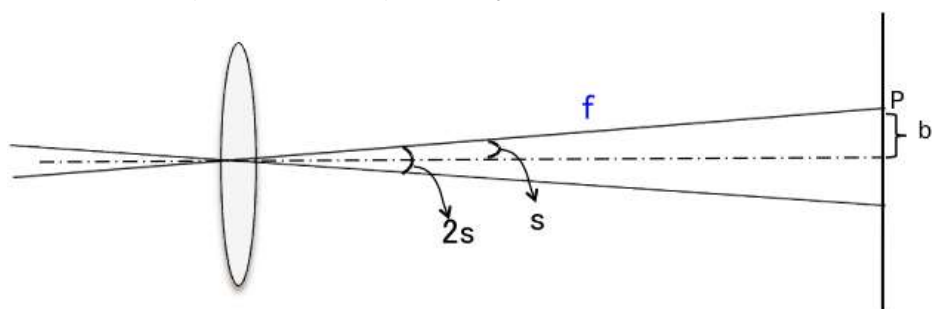
この赤いグラフは、**x 軸上の回折光の強度**を示しています。

ところが、対物レンズは円なので、この回折光の強度 I のグラフは z 軸の回転に対して同じになります(次の図)。これにより「円形開口による回折像」が得られました。



1. 10 焦点近傍の点 P を対物レンズの中心からの角度で表す

これまで焦点近傍の点 P の位置を焦点からの長さ b で考えていましたが、天体観測では角度で位置を示すことが多いので、望遠鏡の入射角 $2s$ と像の大きさの関係を表してみます。P は回折光の焦点なので対物レンズの中心から点 P までの距離は f (焦点距離) です。



このとき、角度 s (秒角) が非常に小さいならば、 $\sin s$ は、 $\sin 1''$ の s 倍と考えると良い(注)ので、

$$b = f \cdot \sin(s) = f \cdot \sin(s \cdot 1'') \doteq f \cdot s \cdot \sin 1'' \quad \text{従って、}$$

$$n = (2\pi / \lambda) \cdot (ba/f) = (2\pi / \lambda) \cdot (a \cdot (f \cdot s \cdot \sin 1'') / f) = (2\pi / \lambda) \cdot (as \cdot \sin 1'')$$

$\sin 1'' = 4.85 \times 10^{-6}$ なので

光の波長 $\lambda = 540\text{nm} = 0.000022(\text{インチ}) = 2.2 \times 10^{-5}(\text{インチ})$ とすると、

$$n = (2\pi / \lambda) * (a * \sin 1'') = (2 \times 3.14 \times 4.85 \times 10^{-6}) * a / 2.2 \times 10^{-5} = 1.3846 * a$$

従って、 **$s = n / (1.3846 * a)$ (秒角) ……⑩**

となります (a の単位はインチ)。

(注) 0. 14節の近似式より、x が非常に小さいとき、 $\sin x \doteq x$

従って、u, x が非常に小さいとき

$\sin(u*x) \doteq u*x \doteq u*\sin x$ が成立。

$u=s, x=1''$ と置くと、 $\sin s = \sin(s*1'') \doteq s*\sin 1''$

回折像の中心の明るい部分、すなわちエアリーディスクの半径は、回折光の強度が最初に 0 となる n です。これは 1. 7節の表からは 3.8 付近であることが分かりますが正確に求めると、 $n=3.832$ です。このとき、⑩式から

$$s = 3.832 / (1.3846 * a) = 2.76 / a$$

となります。

エアリーディスクの光度が半分になるところは 1. 9節の表で $\phi(n)^2=0.5$ から $n \doteq 1.6$ です ($\phi(1.6)^2=0.5075$)。これを正確に求めると $n=1.616$ なので ⑩式から $s=1.616 / (1.3846 * a) = 1.17 / a$ です。

最初のリングの最も明るい部分は、1. 9節の表から $n \doteq 5.2$ です ($\phi(5.2)^2=0.0174$)。

これを正確に求めると $n=5.12$ なので ⑩式から $s=5.12 / (1.3846 * a) = 3.70 / a$ となります。

このときの光の強さは、ピークの約 $1/57$ です ($I(0) * \{\Phi(5.12)\}^2 \doteq I(0) / 57$)。

同様にして、その次に暗くなるリングは、 $n=7.14, s=7.14 / (1.3846 * a) = 5.16 / a$ です。

第二回折リングの最も明るい部分は、 $n=8.43, s=8.43 / (1.3846 * a) = 6.09 / a$ 、

このときの光の強さは、ピークの約 $1/240$ です ($I(0) * \{\Phi(8.43)\}^2 \doteq I(0) / 240$)。

次に暗くなるリングは、 $n=10.17, s=10.17 / (1.3846 * a) = 7.32 / a$ です。

第三回折リングの最も明るい部分は、 $n=11.63, s=11.63 / (1.3846 * a) = 8.40 / a$ 、

このときの光の強さは、ピークの約 $1/620$ です ($I(0) * \{\Phi(11.63)\}^2 \doteq I(0) / 620$)。

(例) 望遠鏡の口径 $D=4$ インチならば、 $a=D/2=2$ なので

エアリーディスクの半径 $s=2.76/2=1.38$ 秒角

第一回折リングの最も明るい部分の半径 $s=3.70/2=1.85$ 秒角

次に暗くなるリングの半径 $s=5.16/2=2.58$ 秒角

第二回折リングの最も明るい部分の半径 $s=6.09/2=3.05$ 秒角

次に暗くなるリングの半径 $s=7.32/2=3.66$ 秒角

第三回折リングの最も明るい部分の半径 $s=8.40/2=4.2$ 秒角

(訳注)

望遠鏡の焦点比を F とすると、エアリーディスクの半径 b (長さ)を求める公式は

$$b=1.22 \lambda * F$$

でした。ここで、 $F=f/D$ です。

これを「角度 s (秒角)を求める式」に変換してみます。

$$b=f * s * \sin 1'' \text{ なので } f * s * \sin 1'' = 1.22 \lambda * f/D$$

従って、

$$s = (1.22 \lambda / D) / \sin 1'' = (1.22 \lambda / D) / (4.85 \times 10^{-6}) \text{ (秒角)}$$

となります (D は望遠鏡の口径)。

すなわち、エアリーディスクの半径は、望遠鏡の焦点距離に依存しません。

次に、これを弧度法(ラジアン)に変換してみます。

$$s = (1.22 \lambda / D) / (4.85 \times 10^{-6}) \text{ (秒角)}$$

$$= 10^6 / 4.85 * (1.22 \lambda / D) \text{ (秒角)}$$

$$= 1/3600 * 10^6 / 4.85 * (1.22 \lambda / D) \text{ (度)} \leftarrow 1 \text{ 秒角} = 1/3600 \text{ 度}$$

$$= \pi / 180 * 1/3600 * 10^6 / 4.85 * (1.22 \lambda / D) \text{ (ラジアン)} \leftarrow 1 \text{ 度} = \pi / 180 \text{ ラジアン}$$

$$= (3.14 \times 10^6) / (180 \times 3600 \times 4.85) * (1.22 \lambda / D) \text{ (ラジアン)}$$

$$= (3.14 \times 10^6) / (1.8 \times 3.6 \times 4.85 \times 10^5) * (1.22 \lambda / D) \text{ (ラジアン)}$$

$$= (3.14 \times 10) / (1.8 \times 3.6 \times 4.85) * (1.22 \lambda / D) \text{ (ラジアン)}$$

$$= (31.4) / (31.428) * (1.22 \lambda / D) \text{ (ラジアン)}$$

$$= 1.22 \lambda / D \text{ (ラジアン)}$$

となります。

すなわち、光の波長を λ 、望遠鏡の口径を D とすると、
エアリーディスクの半径(角度)は弧度法では、

$$s = 1.22 \lambda / D \text{ (ラジアン)}$$

となります。

----- (参考) -----

<ベッセル関数との関係>

エアリーによる結果は、

$n=(2\pi/\lambda)a \sin s$ とするとき、

$$I(s) = I(0) * [1 - n^2/(2 \times 4) + n^4/(2 \times 4^2 \times 6) - n^6/(2 \times 4^2 \times 6^2 \times 8) + \dots]^2$$

のように、 n に関する級数展開式です。

P.41 の参考より、1次のベッセル関数を $J(n)$ とすると。

$$\{1 - n^2/(2 \times 4) + n^4/(2 \times 4^2 \times 6) - n^6/(2 \times 4^2 \times 6^2 \times 8) + \dots\} = 2 * J_1(n)/n$$

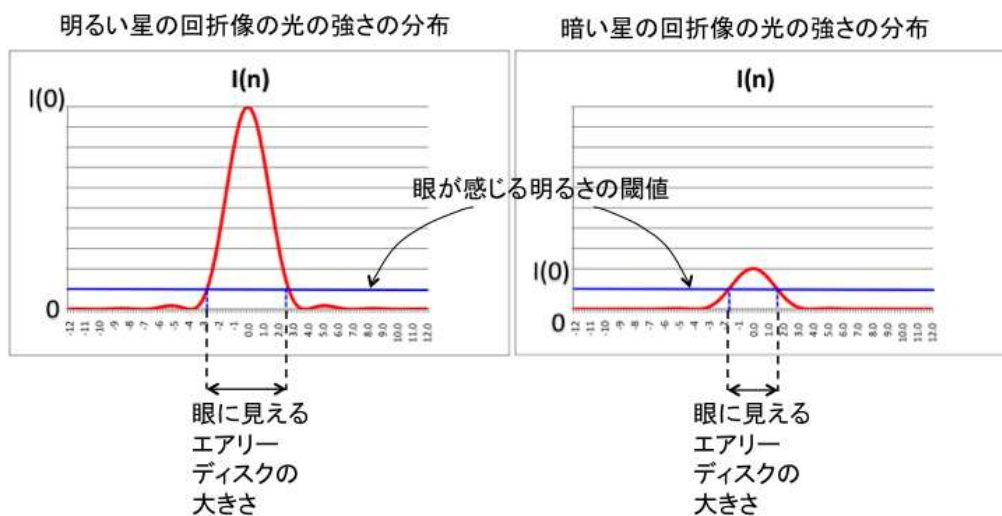
です。すなわち、

$$I(s) = I(0) * [2 * J(n)/n]^2 \quad (\text{J は 1 次 の ベ ッ セ ル 関 数})$$

となります。これは、現在の光学の教科書に載っている式そのものです。

1. 11 明るい星と暗い星の回折像の見え方の比較

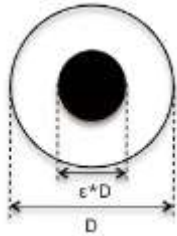
一連の回折リングの光の急速な減少は、非常に明るい星では2つ又は3つのリングが見え、かすかな星ではリングが見えないことを十分説明できます。様々な星のエアリーディスクの直径の差もまた説明できます。かすかな星はエアリーディスクのピーク光度の半分までしか眼には見えないとすると、エアリーディスクの見えるサイズは $n=1.616$, $s=1.17/a$ です。一方、明るい方の星はエアリーディスクのピーク光度の $1/10$ まで眼に見えるるとすると、エアリーディスクの見えるサイズは $n=2.73$, $s=1.97/a$ です。これを図で示すと下のようになり、「暗い星のエアリーディスクは小さく見える」ということができます。



2. エアリーの論文の内容紹介(その2;中央遮蔽)

2.1 中央遮蔽とは

右図のように、開口の中央にある円形の遮蔽のことで、具体的には反射望遠鏡の斜鏡やカタディオプトリック系の副鏡が該当します。



開口の直径 D に対する遮蔽の直径の比率を遮蔽率 ε と言います。

遮蔽率の二乗は、遮蔽が開口に占める面積比となります。

(例) $\varepsilon = 0.316$ とすると、

$$\text{遮蔽の開口に対する面積比} = (0.316)^2 = 0.0999 = 10\%$$

2.2 中央遮蔽の光学系の回折像

エアリーの論文では、最初に遮蔽率 $\varepsilon = 0.5$ として議論しています。

すなわち、開口の半径を a とするとき、中央遮蔽の半径は $a/2$ です。

中央遮蔽の光学系の回折光は、

「中央遮蔽を取り除いた光学系の回折光」から「中央遮蔽に該当する部分からの回折光」を遮断したものです。これは

「中央遮蔽を取り除いた光学系の回折光」から「中央遮蔽と同じ大きさの無遮蔽の光学系の回折光」を除去したものに等しくなります。

これを式で表現すると、

$$2(A/f) \sin\left\{ \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) (f + \alpha - ct) \right\} * \int_{(-a \leq x \leq a)} (a^2 - x^2)^{1/2} \cos\left\{ \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) * bx/f \right\} dx$$

$$-2(A/f) \sin\left\{ \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) (f + \alpha - ct) \right\} * \int_{(-a/2 \leq x \leq a/2)} (a^2/4 - x^2)^{1/2} \cos\left\{ \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) * bx/f \right\} dx$$

となります。ここで、 $x/a = w$, $2x/a = u$ と置くと、 $0 \leq w, u \leq 1$ として上記の式は

$$4a^2(A/f) \sin\left\{ \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) (f + \alpha - ct) \right\} * \int (1 - w^2)^{1/2} \cos\left\{ \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) * baw/f \right\} dw$$

$$-4 * a^2/4(A/f) \sin\left\{ \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) (f + \alpha - ct) \right\} * \int (1 - u^2)^{1/2} \cos\left\{ \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) * bau/f \right\} du$$

$$= a^2 \pi (A/f) \sin\left\{ \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) (f + \alpha - ct) \right\} \{ \Phi(n) - (1/4) * \Phi(n/2) \}$$

となります。

この回折光の強度を $I(n)$ とすると、

$$I(n) = [a^2 \pi (A/f) * \{ \Phi(n) - (1/4) * \Phi(n/2) \}]^2 / 2$$

$$\text{但し、} \Phi(n) = 1 - n^2 / (2 \times 4) + n^4 / (2 \times 4^2 \times 6) - n^6 / (2 \times 4^2 \times 6^2 \times 8) + \dots$$

$$I(0) = [(3/4) a^2 \pi (A/f)]^2 / 2$$

$$I(n) = [a^2 \pi (A/f) * \{ \Phi(n) - (1/4) * \Phi(n/2) \}]^2 / 2 \\ = I(0) * \{ \Phi(n) - (1/4) * \Phi(n/2) \}^2$$

となります。

無遮蔽の場合、 $I(0) = \{ 4a^2(A/f) * (\pi/4) \}^2 / 2 = \{ a^2 \pi (A/f) \}^2 / 2$ なので

遮蔽率 50% の中央遮蔽のエアリーディスクのピーク強度

$$= (3/4)^2 \times \text{無遮蔽のエアリーディスクのピーク強度}$$

$$= 0.56 \times \text{無遮蔽のエアリーディスクのピーク強度}$$

となります。

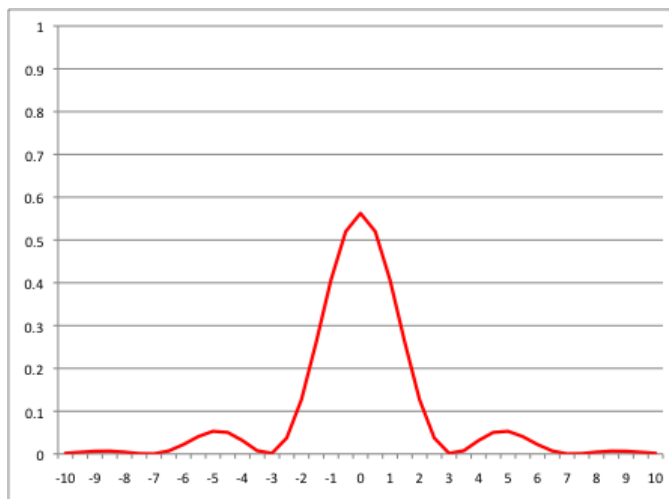
$I(n)$ がゼロとなるのは、 $n=3.15, 7.18, \dots$ です。

従って、エアリーディスクの半径は、無遮蔽のエアリーディスクの半径 ($n=3.83$) より

小さくなります。また、回折リングの光の強度は、

第一回折リング = エアリーディスクのピーク強度の 1/10、

第二回折リング = エアリーディスクのピーク強度の 1/80 です。



このように、対物レンズの中央部を覆うことによりセントラルスポットの光度は減少し、リングの明るさは増加します。

上記は遮蔽率 $\varepsilon = 0.5$ の場合でしたが、遮蔽率 ε のときは

$$I(n) = I(0) * \{ \Phi(n) - (\varepsilon^2) * \Phi(\varepsilon * n) \}^2$$

となります。

付録1 $q \doteq f - bx/f$ の証明

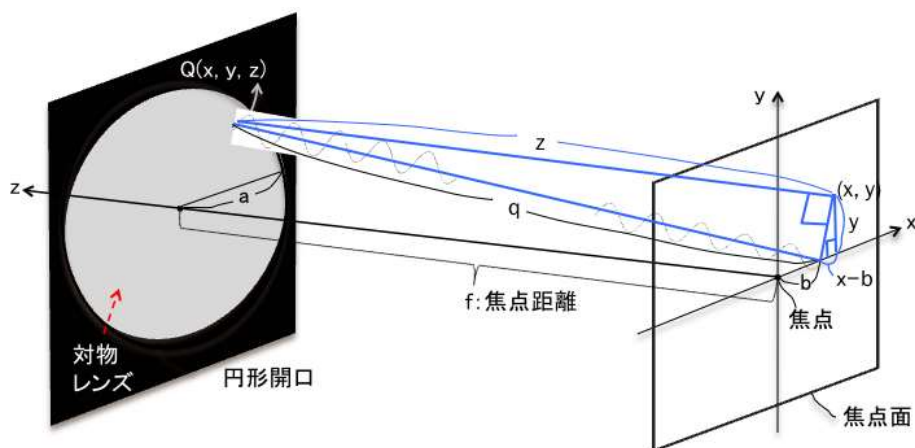
q を他の変数 f, b, x の近似式で表すことを考えます。

そのために、座標系 (x, y, z) の中にあるいくつかの直角三角形に対してピタゴラスの定理 (三平方の定理) を適用します；

下の図には、青い線の直角三角形が2つあります。これに対しピタゴラスの定理を

2回適用すると $(x - b)^2 + y^2 + z^2 = q^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$

が成立します。



① から、 $q^2 = (x - b)^2 + y^2 + z^2 = x^2 - 2bx + b^2 + y^2 + z^2$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - 2bx + b^2 \doteq x^2 + y^2 + z^2 - 2bx \cdots \cdots \textcircled{2}$$

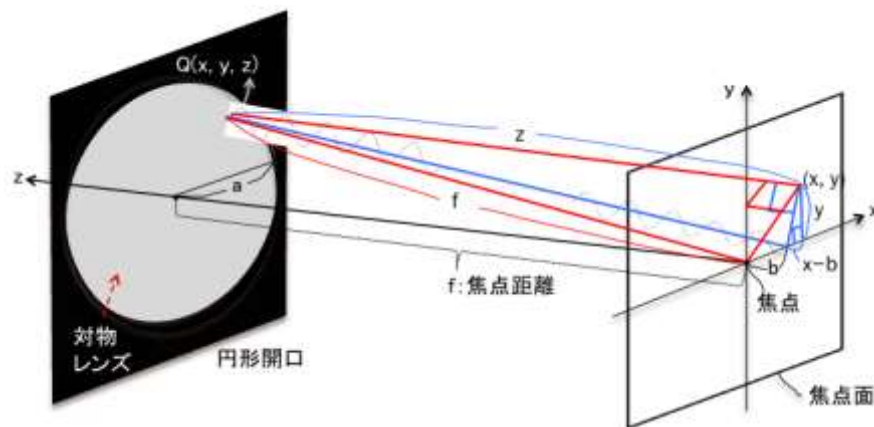
ここで、 b^2 は非常に小さいので無視します (b は焦点近傍の値なので、その二乗である b^2 は非常に小さくなる)。

一方、焦点の定義より、対物レンズ上の点 Q から焦点への線の長さは f なので

下の図の赤い線の直角三角形でピタゴラスの定理を適用すると

$$x^2 + y^2 + z^2 = f^2$$

が成立します。



従って、これを⑨式に代入すると

$$q^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - 2bx = f^2 - 2bx$$

となり、

$$q = (f^2 - 2bx)^{1/2} = \{ f^2 * (1 - 2bx/f^2) \}^{1/2} = f * (1 - 2bx/f^2)^{1/2} \dots \textcircled{10}$$

ここで、0. 2. 14節の近似公式より

p が小さいとき、 $(1 - p)^{1/2} \doteq 1 - (1/2) * p$ なので

⑩式は、 $q = f * (1 - 2bx/f^2)^{1/2} \doteq f * (1 - (1/2) * 2bx/f^2) = f - bx/f$

となります。これで q を他の変数 f, b, x の近似式で表すことが出来ました。

付録2 エアリーの論文

(1) エアリーの論文 (日本語訳)

エアリーの論文は式による説明で図はありません。

円形開口を持つ対物レンズの回折について

トリニティカレッジ・フェロー、及びケンブリッジ大学天文学・実験物理学

プルミアン教授職 ジョージ・ビドル・エアリー [1834年11月24日]

2019年6月 日本語訳作成 舟越 和己

優秀な望遠鏡で星を見たとき、その像を囲むリングの形や明るさの研究は、対物レンズに矩形の絞りを置いた場合、決して難しくありません。積分する必要がある式は複数の独立な変数のサインやコサインであり、積分の範囲を正しく取る必要があります。この問題のいくつかのケースは完全に観測と一致しています。申すまでもなく、これらの実験は、その直接の目的が光の波動説を説明することを除いてめったに行われません。しかしながら、異なる種類のケースがあります；それは実際問題として常に繰り返され、それを完全に究明するためには、より難しい積分が要求されます；これは円形開口を持つ対物レンズの場合です。この日常的な光学現象を数学的に解明したいという願望から、そこに潜む積分値の計算を獲得したいという気になりました。

a を対物レンズの半径、 f を焦点距離、 b を焦点から(望遠鏡の軸に垂直な平面上の)点までの横方向の距離とします。このとき、レンズは球面収差がなく、レンズには光の平面波が入射し、入射した光はレンズにより焦点を中心とする球面波に変換されるとします。対物レンズにより制限されたとき、波の小さな部分は小さな波(訳注)の発生源と考えられ、その光の強さは波の小さな部分の表面に比例します；これらの小さな波の位相は球面波を同時に離れているので、全て同じ位相です。

(訳注)発生する小さな波を「素元波」という。

$\delta x \times \delta y$ を対物レンズの非常に小さな領域とし、 q をその領域から(焦点面の)焦点から b だけ離れた点への距離とすると、この小さな波による、焦点から b だけ離れた点での波の変位(訳注)は

$$\delta x \times \delta y \times \sin 2\pi / \lambda (vt - q - A)$$

により表されます。

(訳注) 当時は光を伝える媒体(エーテル)があると考えられていたので、この論文では

「displacement of the ether(エーテルの変位)」

という表現をしています。(エーテルの存在はその後否定されました)

そして球面波の全ての部分からの小さな波による変位の合計は

$$\sin 2\pi / \lambda (vt - q - A)$$

を対物レンズの全表面に渡る積分となります。

(x, y, z)をレンズ上の点とし、xは「焦点からbだけ離れた点への方向」と平行にレンズの中心から測る座標成分、yはxを測る方向や望遠鏡の光軸と直角方向に測る座標成分、また、zは望遠鏡の光軸に平行に焦点から測る座標成分とします。このとき、

$$q = \{(x - b)^2 + y^2 + z^2\}^{1/2} = \{x^2 + y^2 + z^2 - 2bx\}^{1/2}$$

が成立します。但し、bの二乗は非常に小さいので省きます。

波面は中心が焦点である球面の一部なので、

$x^2 + y^2 + z^2 = f^2$ が成立します。従って、

$$q = \{f^2 - 2bx\}^{1/2} \doteq f - bx/f$$

となり、対物レンズの全表面に渡る積分の対象は

$$\sin 2\pi / \lambda (vt - f - A + bx/f)$$

です。この式のyに関する積分は非常に単純です。その理由は、yが積分の対象の式に含まれていないからです。yの最大値と最小値を y_1, y_2 とすると、最初の積分は

$$(y_2 - y_1) \times \sin 2\pi / \lambda (vt - f - A + bx/f)$$

です。

xに関して積分する前に、 y_1, y_2 の値をxで置換えます。円形開口に対して、

$$y_2 - y_1 = 2*(a^2 - x^2)^{1/2}$$

ここで、根の符号は正です。従って焦点からbだけ離れた点での波の変位は下記により表されます；

$$\begin{aligned} & 2 \int (a^2 - x^2)^{1/2} * \sin 2\pi / \lambda (vt - f - A + bx/f) \\ &= 2 \sin 2\pi / \lambda (vt - f - A) \times \int (a^2 - x^2)^{1/2} * \cos(2\pi / \lambda * bx/f) \\ & \quad + 2 \cos 2\pi / \lambda (vt - f - A) \times \int (a^2 - x^2)^{1/2} * \sin(2\pi / \lambda * bx/f) \end{aligned}$$

積分の範囲は $x=-a$ から $x=+a$ です。

この範囲では、明らかに

$$\int (a^2 - x^2)^{1/2} * \sin(2\pi / \lambda * bx/f) = 0$$

が成立します(全ての正の値は、それと絶対値が等しい負の値により相殺されるからです):

従って、変位は

$$2 \sin 2 \pi / \lambda (vt-f-A) \times \int (a^2 - x^2)^{1/2} * \cos(2 \pi / \lambda * bx / f)$$

により表されます。ここで積分の範囲はx=-a から x=+a です。

x/a=w, $2 \pi / \lambda * ba / f = n$ と置くと、式は

$$2 a^2 \sin 2 \pi / \lambda (vt-f-A) \times \int (1 - w^2)^{1/2} * \cos nw \quad (w=-1 \text{ to } w=+1)$$

または

$$4 a^2 \sin 2 \pi / \lambda (vt-f-A) \times \int (1 - w^2)^{1/2} * \cos nw \quad (w=0 \text{ to } w=+1)$$

となります。

定積分

$$\int (1 - w^2)^{1/2} * \cos nw \quad \text{from } w=0 \text{ to } w=+1$$

はnの関数ですが、これをNと置くと、Nは下記の線形微分方程式

$$N + 3/n * dN/dn + d^2N/dn^2 = 0$$

を満たすことが示されます。

べき級数を仮定することによりこの方程式を解くか、あるいはcos nwをテイラー展開して各項目を個別に積分すると、Nは下記の式になります;

$$\pi / 4 \times (1 - n^2 / (2 * 4) + n^4 / (2 * 4^2 * 6) - n^6 / (2 * 4^2 * 6^2 * 8) + \&c.)$$

この論文に添付したテーブルは、n=0 から0.2刻みで n=12までの上記級数の値を示しています。

各値は個別に計算され、計算に使われた対数はチェックされ、計算の全プロセスは慎重に確認されています。

このテーブルを使用する場合、 $n = 2 \pi / \lambda * ba / f$

としなければなりません。光の強度を確かめたいポイントを焦点からの距離bを使用する代わりに、角度(秒角)を使用するならば、 $b = f * s * \sin 1''$ となります。このとき、 $n = 2 \pi / \lambda * a * s \sin 1''$ です。

もし $\lambda = 0.000022$ インチとすると、 $n = 1.3846 * a * s$ 、ここでaはインチで表現されます。この式とテーブルの数から下記が推論できます。

1. (望遠鏡による)星の像は点ではなく、一連の明るいリングに囲まれた明るいサークル(セントラルスポット)です。これらの角直径は望遠鏡の口径のみに依存し、口径に反比例します。

2. 光の強度は(波動理論の原理に基づき)

$$\sin^2 \pi / \lambda (vt - f - A)$$

という係数の二乗により表現され、セントラルスポットの中心の強度が基準値として取られます。

$n=1.616$, または $s=1.17/a$ のとき、そこでの光の強度はセントラルスポットのピークの半分です;

$n=3.832$, または $s=2.76/a$ のとき、光は完全に消えて黒いリングとなります; 最初の明るいリングの最も明るい部分は $n=5.12$, または $s=3.70/a$ に対応し、その光の強度は中心の $1/57$ です;

$n=7.14$, または $s=5.16/a$ のとき黒いリングになります; 二番目の明るいリングの最も明るい部分は $n=8.43$, または $s=6.09/a$ に対応し、その光の強度は中心の $1/240$ です;

$n=10.17$, または $s=7.32/a$ のとき黒いリングになります; 三番目の明るいリングの最も明るい部分は $n=11.63$, または $s=8.40/a$ に対応し、その光の強度は中心の $1/620$ です;

一連のリングでの光の急速な減少は、非常に明るい星で2つから3つのリングが見え、微かな星ではリングが見えないことを十分に説明します。セントラルスポット(またの名を「偽のディスク」)の直径の差もまた十分に説明されます。微かな星の「偽のディスク」の中心の光の強度の半分以下が人の眼に感じない位の明るさだとすると、微かな星の「偽のディスク」の半径は $n=1.616$, 又は $s=1.17/a$ です; 一方、中心の光の $1/10$ まで人の眼で感知できるならば、明るい星の「偽のディスク」の半径は $n=2.73$, または $s=1.97/a$ で決定されます。

これらの結果は実際の観測と概ね合致していますが、リングを測定するのは容易ではありません; (リングが大きく見えるためにはレンズの半径 a は小さい方がよいのですが、その分リングの明るさは減少するのでマイクロメーターで見分けるのが困難になります。しかし、ブラウンフォーファーは上記の結果と非常に良く適合する測定値を得ました。

数値の検証のためには楕円の開口がベストであるように思われます。上記で示したことと同様な手法でリングが開口の楕円と横切る方向の楕円になることが分かります；楕円開口に対するリングの長軸は、楕円開口の短軸を直径とする円形開口の直径と同じですが、光の強度は軸の長さの二乗に比例して大きくなります。これについては実験で確かめる機会がまだありません。

次に以下の問題の解に対してテーブルの値を適用します；

リング状の開口が残るように、開口の中心に対物レンズの半分の直径の丸い遮蔽を置いたときの回折リングの直径を求めること。

遮蔽の半径は $a/2$ なので変位は下記になることが容易に分かります；

$$2 \sin 2 \pi / \lambda (vt-f-A) \times \int (a^2 - x^2)^{1/2} * \cos(2 \pi / \lambda * bx / f) \quad (x=-a \text{ から } x=+a)$$

$$- 2 \sin 2 \pi / \lambda (vt-f-A) \times \int (a^2 - x^2)^{1/2} * \cos(2 \pi / \lambda * bx / f) \quad (x=-a/2 \text{ から } x=+a/2)$$

$x/a=w$, $2x/a=u$ と置くと、この式は

$$4a^2 \pi * \sin 2 \pi / \lambda (vt-f-A) \times \int (a^2 - x^2)^{1/2} * \cos(2 \pi / \lambda * baw / f)$$

$$- 4 * a^2 / 4 * \pi * \sin 2 \pi / \lambda (vt-f-A) \times \int (a^2 - x^2)^{1/2} * \cos(2 \pi / \lambda * bau / (2f))$$

となります。 w と u の変数の範囲はどちらも0と1です。係数 $a^2 \pi$ を除くと強度は

$$\{ \varphi(n) - 1/4 * \varphi(n/2) \}^2$$

により表されます。ここで、 $\varphi(n)$ の値はテーブルで与えられます。

$n=3.15, 7.18, 10.97 \dots$ に対応するのは黒いリングです。(中央の強度に対する)明るいリングの強度は $1/10, 1/80$ です。このように、対物レンズの中央部を覆うことによりセントラルスポットの光度は減少し、リングの明るさは増加します。

同様にして、円形の遮蔽の直径= $a(1-p)$ とすると、光の強度は

$$\{ \varphi(n) - (1-p)^2 * \varphi(n-pn) \}^2$$

に比例します。

中括弧の中の式は p が小さい時、

$$2p * \varphi(n) + pn * \varphi'(n) = p/n * d\{n^2 \varphi(n)\} / dn$$

に等しくなります。

従って、望遠鏡の対物レンズの周辺付近の非常に幅が狭い環状部分のみ光を通すならば、回折像が暗となる場所の半径は $d\{n^2 \varphi(n)\} / dn = 0$ を満たす n です。すなわち、

$n^2\varphi(n)$ が極値となる n です。この n の値は、(グラフを描くと分かるように)遮蔽のない開口に対応する回折リングの暗の半径よりも小さくなります。

この結論はJ.ハーシェル卿により記録された経験と合致しません;しかし、その結果はブラウンフォーファーの結果と不一致であることが知られています;従って、J.ハーシェル卿により観測された現象には他に原因があると考えたい。

(以降の12行は省略)

(2) エアリーの論文 (原文)

下記にエアリーの論文の原文を示します;

On the Diffraction of an Object glass with Circular Aperture

by **George Biddell Airy, A.M. late Fellow of Trinity College, and Plumian Professor of Astronomy and Experimental Philosophy in the University of Cambridge.**

[Nov. 24, 1834]

The investigation of the form and brightness of the ring or rays surrounding the image of a star as seen in a good telescope, when a diaphragm bounded by a rectilinear contour is placed upon the object-glass, though sometimes tedious is never difficult. The expressions which it is necessary to integrate are always sines and cosines of multiples of the independent variable, and the only trouble consists in taking properly the limits of integration. Several cases of this problem has been entirely in accordance with observation. These experiments, I need scarcely remark, have seldom been made except by those whose immediate object was to illustrate the undulatory theory of light. There is however a case of a somewhat different kind; which in practice recurs perpetually, and which in theory requires for its complete investigation the value of a more difficult integral; I mean the usual case of an object-glass with a circular aperture. The desire of submitting to mathematical investigation every optical phenomenon of frequent occurrence has induced me to procure the computation of the numerical values of the integral that presents itself in this inquiry: and I now beg leave to lay before the Society the calculated table, with a few remarks upon its application.

Let a be the radius of the aperture of the object glass, f the focal length, b the lateral distance of a point P (in the plane which is normal to the axis of the telescope) from the focus. Then the lens being supposed aplanatic, and a plane wave of light being supposed incident, the immediate effect of the lens is to give to this wave a spherical shape, its centre being the focus of the lens. Every small portion of the wave, as limited by the form of the object-glass, must now be supposed to be the origin of a little wave, whose intensity is proportional to the surface of that small portion; and the phases of

all these little waves, at the time of leaving the spherical surface above alluded to, must be the same.

If $\delta x \times \delta y$ be the area of a very small part of objective-glass, q the distance the distance of that part from the point defined by the distance b , the displacement of the ether at that point, caused by this small wave, will be represented by

$$\delta x \times \delta y \times \sin 2\pi / \lambda (vt - q - A);$$

and the whole displacement caused by the small waves coming from every part of the spherical wave will be the integral of

$$\sin 2\pi / \lambda (vt - q - A)$$

through the whole surface of the object-glass,

q being expressed in terms of the co-ordinates of any point of the spherical surface.

Now let x be measured from the center of the lens in a direction parallel to b ; y perpendicular to x and also to the axis of the telescope; and z from the focus parallel to the axis of the telescope. Then

$$q = \{(x - b)^2 + y^2 + z^2\}^{1/2} = \{x^2 + y^2 + z^2 - 2bx\}^{1/2}$$

omitting squares and superior powers of b .

But $x^2 + y^2 + z^2 = f^2$, since the wave is part of a sphere whose centre is the focus; therefore,

$$q = \{f^2 - 2bx\}^{1/2} \doteq f - bx/f$$

and the quantity to be integrated is

$$\sin 2\pi / \lambda (vt - f - A + bx/f)$$

The first integration with regard to y is simple, as y does not enter into the expression, which is therefore to be considered as constant.

Putting y_1 and y_2 for the smallest and greatest values of y corresponding to x , the first integral is

$$(y_2 - y_1) \times \sin 2\pi / \lambda (vt - f - A + bx/f)$$

To this point of the investigation the expressions are general, including every form of contour of the object-glass.

We must now substitute the value of y_1 and y_2 in term of x , before integrating with regard to x .

For a circular aperture

$$y_2 - y_1 = 2*(a^2 - x^2)^{1/2}$$

where the sign of the radical is essentially positive. Hence the displacement of the ether at the point defined by the distance b is represented by

$$\begin{aligned} & 2 \int (a^2 - x^2)^{1/2} * \sin 2 \pi / \lambda (vt - f - A + bx / f) \\ & = 2 \sin 2 \pi / \lambda (vt - f - A) \times \int (a^2 - x^2)^{1/2} * \cos(2 \pi / \lambda * bx / f) \\ & \quad + 2 \cos 2 \pi / \lambda (vt - f - A) \times \int (a^2 - x^2)^{1/2} * \sin(2 \pi / \lambda * bx / f) \end{aligned}$$

and the limits of integration are from $x=-a$ to $x=+a$. Between these limits it is evident that

$$\int (a^2 - x^2)^{1/2} * \sin(2 \pi / \lambda * bx / f) = 0$$

(as every positive value is destroyed by an equal negative value): and the displacement is therefore represented by

$$2 \sin 2 \pi / \lambda (vt - f - A) \times \int (a^2 - x^2)^{1/2} * \cos(2 \pi / \lambda * bx / f)$$

the integral being taken between the limits $x=-a$, $x=+a$.

If we make $x/a=w$, $2 \pi / \lambda * ba / f = n$, the expression becomes

$$2 a^2 \sin 2 \pi / \lambda (vt - f - A) \times \int (1 - w^2)^{1/2} * \cos nw$$

from $w=-1$ to $w=+1$

or

$$4 a^2 \sin 2 \pi / \lambda (vt - f - A) \times \int (1 - w^2)^{1/2} * \cos nw$$

from $w=0$ to $w=+1$

It does not appear, so far as I am aware, that the value of this integral can be exhibited in a finite form either for general or for particular values of w .

The definite integral

$$\int (1 - w^2)^{1/2} * \cos nw \quad \text{from } w=0 \text{ to } w=+1$$

(which will be a function of n only) being expressed by N , it may be shewn that N satisfies the linear differential equation

$$N + 3/n * dN/dn + d^2N/dn^2 = 0$$

which may be depressed to an equation of the first order that does not appear to yield to any known method of solution.

If we solve the equation by assuming a series proceeding by powers of n, or if we expand

cos nw and integrate each term separately, we arrive (by either method) at this expression for the integral

$$\pi / 4 \times (1 - n^2 / (2 \cdot 4) + n^4 / (2 \cdot 4^2 \cdot 6) - n^6 / (2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8) + \&c.)$$

The table appended to this paper contains the values of the series in the bracket, for every 0.2 from n=0 to n=12. Each value has been calculated separately, the logarithms used in the calculation have been systematically checked, and the whole process has been carefully examined. The calculations were carried to one place further than the numbers here exhibited. I believe that place; except perhaps in some of the last values, where the rapid divergence of the series for the first five or six terms made it difficult to calculate them accurately by logarithms.

In the use of this table n must be taken = $2 \pi / \lambda * ba / f$. If instead of using the linear distance b to define the point of the field at which we wish to ascertain the illumination, we use the number of seconds s, then $b = f * s * \sin 1''$, and n must be taken = $2 \pi / \lambda * a * s * \sin 1''$. If λ be taken for mean rays = 0.000022 inch, n must be taken = $1.3846 * a * s$, a being expressed in inches. From this expression, and from the numbers of the table, we draw the following inferences.

1. The image of a star will not be a point but a bright circle surrounded by a series of bright rings. The angular diameters of these (or the value of s corresponding to a given value of n) will depend on nothing but the aperture of the telescope, and will be inversely as the aperture.

2. The intensity of the light being expressed (on the principles of the undulatory theory) by the square of the coefficient of

$$\sin^2 \pi / \lambda (vt - f - A),$$

and the intensity at the center of the circle being taken as the standard, it appears that the central spot has lost half its light when $n = 1.616$, or $s = 1.17/a$; that there is total privation of light, or a black ring, when $n = 3.832$, or $s = 2.76/a$; that the brightest part of the first ring corresponds to $n = 5.12$, or $s = 3.70/a$, and that its intensity is about

1/57 of that at the center; that there is a black ring when $n=7.14$, or $s=5.16/a$; that the brightest part of the second bright ring corresponds to $n=8.43$, or $s=6.09/a$, and that its intensity is about 1/240 of that of the center; that there is a black ring when $n=10.17$, or $s=7.32/a$; that the brightest part of the third bright ring corresponds to $n=11.63$, or $s=8.40/a$, and that its intensity is about 1/620 of that of the center.

The rapid decrease of light in the successive rings will sufficiently explain the visibility of two or three rings with a very bright star and the non-visibility of rings with a faint star. The difference of the diameters of the central spots (or spurious disks) is also fully explained. Thus the radius of the spurious disk of a faint star, where light of less than half the intensity of the central light makes no impression on the eye, is determined by making $n=1.616$, or $s=1.17/a$; whereas the radius of the spurious disk of a bright star, where light of 1/10 the intensity of the central light is sensible, is determined by making $n=2.73$, or $s=1.97/a$.

The general agreement of these results with observation is very satisfactory. It is not easy to obtain measures of the rings; since when a is made small enough to render them very distinct as to form and separation, the intensity of their light (which varies as a^4) is so feeble that they will not bear sufficient illumination for the use of a micrometer. Fraunhofer however obtained measures agreeing pretty well (as to proportion of diameters, &c.) with the results above.

For verification of the numbers it would probably be best to use an elliptic aperture. By an investigation of exactly the same kind as that above it will be found that the rings will then be ellipses exactly similar to the ellipse of the aperture, but in a transverse position; that the major axes of the rings for a circular aperture will be the same as the diameters of the rings for a circular aperture whose diameter = minor axis of ellipse of aperture, but that the intensity will be greater in the proportion of the squares of the axes. I have not yet had an opportunity of examining this in practice.

I shall now apply the numbers of the table to the solution of the following problem. To find the diameters, &c. of the rings when a circular patch, whose diameter is half the diameter of the object glass, is applied to its center, so as to leave an annular aperture.

The radius of the patch being $a/2$, it is easily seen that the displacement (using the same notation) is

$$2 \sin^2 \pi / \lambda (vt-f-A) \times \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^{1/2} * \cos(2 \pi / \lambda * bx / f) \quad (\text{from } x=-a \text{ to } x=+a)$$

$$- 2 \sin^2 \pi / \lambda (vt-f-A) \times \int_{-a/2}^{+a/2} (a^2 - x^2)^{1/2} * \cos(2 \pi / \lambda * bx / f) \quad (\text{from } x=-a/2 \text{ to } x=+a/2)$$

Putting $x/a=w$, $2x/a=u$, this become

$$4a^2 \pi * \sin^2 \pi / \lambda (vt-f-A) \times \int_{-1}^{+1} (a^2 - x^2)^{1/2} * \cos(2 \pi / \lambda * baw / f)$$

$$- 4a^2 / 4 * \pi * \sin^2 \pi / \lambda (vt-f-A) \times \int_{-1}^{+1} (a^2 - x^2)^{1/2} * \cos(2 \pi / \lambda * bau / (2 f))$$

the limits of integration both for w and for u being 0 and 1. Omitting the factor $a^2 \pi$, the intensity will be expressed by

$$\{ \varphi(n) - 1/4 * \varphi(n/2) \}^2$$

where $\varphi(n)$ is number given in the table.

Upon forming the numerical values we find that the black rings correspond to values of $n=3.15, 7.18, 10.97$: and that the intensities of the bright rings (in terms of the intensity of the center) are $1/10, 1/80$. Thus the magnitude of the central spot is diminished, and the brightness of the rings increased, by covering the central part of the object-glass.

In like manner, if the diameter of the circular patch $=a(1-p)$, the intensity of light would be proportional to $\{ \varphi(n) - (1-p)^2 * \varphi(n-pn) \}^2$.

The quantity under the bracket, if p is very small, is equal to

$$2p * \varphi(n) + pn * \varphi'(n) = p/n * d\{n^2 \varphi(n)\} / dn.$$

In the case of a very narrow annulus therefore the diameters of the black rings will be determined by making $n^2 \varphi(n)$ maximum or minimum. It appears then that there ought to be only one black ring corresponding to each black ring with the full aperture, and that its diameter ought to be somewhat smaller.

This conclusion does not agree with the experiments recorded by Sir J. Herschel, in the Encyc. Metrop. Article Light, page 488: but it is acknowledged there that the

results are discordant with Fraunhofer's: and I am inclined therefore to attribute the phenomena observed by Sir J. Herschel to some other cause.

The investigation of cases of diffraction similar to that discussed here appears to me a matter of great interest to those who are occupied with the examination of the theory of light. The assumption of transversal vibrations is not necessary here as for the explanation of the phenomena of polarization: and they therefore offer no arguments for the support of that principle. But they require absolutely the supposition of almost unlimited divergence of the waves coming not merely from a small to which they lead us, shew strikingly how small foundation there was for the original objection to the undulatory theory of light, viz. that if waves spread equally in all directions, there could be no such thing as darkness.

G. B. AIRY

Observatory Cambridge,

November 20, 1834.

付録3

積分 $\int (1-w^2)^{1/2} dw, \int (1-w^2)^{1/2} w^2 dw, \int (1-w^2)^{1/2} w^4 dw, \int (1-w^2)^{1/2} w^6 dw$ の計算

① $\int (1-w^2)^{1/2} dw$ の計算

$w = \sin \theta$ と置くと、 $0 \leq w \leq 1$ は $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $dw = \cos \theta d\theta$

$$\begin{aligned} \int (1-w^2)^{1/2} dw &= \int (1-\sin^2 \theta)^{1/2} * \cos \theta d\theta = \int (\cos^2 \theta)^{1/2} * \cos \theta d\theta = \int \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int (1+\cos 2\theta)/2 d\theta = \theta/2 + \sin 2\theta/4 \end{aligned}$$

② $\int (1-w^2)^{1/2} w^2 dw$ の計算

$(1-w^2)^{1/2} = (1-\sin^2 \theta)^{1/2} = \cos \theta$ なるので

$$\begin{aligned} \int (1-w^2)^{1/2} w^2 dw &= \int \cos \theta * \sin^2 \theta * \cos \theta d\theta = \int (\sin \theta * \cos \theta)^2 d\theta \\ &= \int ((\sin 2\theta)/2)^2 d\theta = (1/4) * \int \sin^2 2\theta d\theta = (1/4) * \int (1-\cos 4\theta)/2 d\theta \\ &= (1/8) * \int (1-\cos 4\theta) d\theta = (1/8) * (\theta - (\sin 4\theta)/4) = \theta/8 - (\sin 4\theta)/32 \end{aligned}$$

③ $\int (1-w^2)^{1/2} w^4 dw$ の計算

$$\begin{aligned} \int (1-w^2)^{1/2} w^4 dw &= \int \sin^4 \theta \cos^2 \theta d\theta = \int \sin^2 \theta (\sin \theta * \cos \theta)^2 d\theta \\ &= \int (1-\cos 2\theta)/2 * ((\sin 2\theta)/2)^2 d\theta = \int (1-\cos 2\theta)/2 * (1/4) * (1-\cos 4\theta)/2 d\theta \\ &= (1/16) * \int (1-\cos 2\theta)(1-\cos 4\theta) d\theta \\ &= (1/16) * \int (1-\cos 4\theta - \cos 2\theta + \cos 2\theta \cos 4\theta) d\theta \\ &= (1/16) * \int (1-\cos 4\theta - \cos 2\theta + (\cos 2\theta + \cos 6\theta)/2) d\theta \\ &= (1/16) * \int (1-\cos 4\theta - (\cos 2\theta)/2 + (\cos 6\theta)/2) d\theta \\ &= (1/16) * \int (1-(\cos 2\theta)/2 - \cos 4\theta + (\cos 6\theta)/2) d\theta \\ &= (1/16) * [\theta - (\sin 2\theta)/4 - (\sin 4\theta)/4 + (\sin 6\theta)/12] \\ &= \theta/16 - (\sin 2\theta)/64 - (\sin 4\theta)/64 + (\sin 6\theta)/192 \end{aligned}$$

③ $\int (1-w^2)^{1/2} w^6 dw$ の計算

$$\begin{aligned} \int (1-w^2)^{1/2} w^6 dw &= \int \sin^6 \theta \cos^2 \theta d\theta = \int \sin^4 \theta (\sin \theta * \cos \theta)^2 d\theta \\ &= \int \{(1-\cos 2\theta)/2\}^2 * ((\sin 2\theta)/2)^2 d\theta = (1/16) * \int (1-2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) * \sin^2 2\theta d\theta \\ &= (1/16) * \int (\sin^2 2\theta - 2\cos 2\theta * \sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta * \sin^2 2\theta) d\theta \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで、 $\sin^2 2\theta = (1-\cos 4\theta)/2$, $-2\cos 2\theta * \sin^2 2\theta = -\sin^2 2\theta * d(\sin 2\theta)/d\theta$

$$\begin{aligned} \cos^2 2\theta * \sin^2 2\theta &= (\sin 2\theta * \cos 2\theta)^2 = \{(\sin 4\theta)/2\}^2 = (1/4)\sin^2 4\theta \\ &= (1/4)(1/2)(1-\cos 8\theta) = (1/8)(1-\cos 8\theta) \end{aligned}$$

従って、 $\textcircled{1} = (1/16) * \int \{(1-\cos 4\theta)/2 - \sin^2 2\theta * d(\sin 2\theta)/d\theta + (1/8)(1-\cos 8\theta)\} d\theta$

$$= (1/128) * \int \{ 5 - 4\cos 4\theta - \cos 8\theta - 8 \sin^2 2\theta * d(\sin 2\theta)/d\theta \} d\theta$$

$$= (1/128) * \{ 5\theta - \sin 4\theta - (1/8)\sin 8\theta - (8/3)\sin^3 2\theta \}$$

$$= (1/3072) \{ 120\theta - 24\sin 4\theta - 3\sin 8\theta - 64\sin^3 2\theta \}$$

付録4 微分方程式 $N + (3/n) * dN/dn + d^2N/dn^2 = 0$ を解く

微分方程式を解く場合、積分の範囲は、 $-1 \leq w \leq 1$ とします。

$J=n*N$ と置いて微分方程式 $N + (3/n) * dN/dn + d^2N/dn^2 = 0$ を変形します。

$N=J/n=n^{-1}*J$ なので、

$$dN/dn = -n^{-2}*J + n^{-1}*dJ/dn$$

$$d^2N/dn^2 = 2n^{-3}*J -n^{-2}*dJ/dn -n^{-2}*dJ/dn +n^{-1}*d^2J/dn^2$$

従って、

$$N + (3/n) * dN/dn + d^2N/dn^2 = n^{-1}*J + (3/n) * (-n^{-2}*J + n^{-1}*dJ/dn) + 2n^{-3}*J -n^{-2}*dJ/dn -n^{-2}*dJ/dn +n^{-1}*d^2J/dn^2$$

$$= n^{-1}*J -3n^{-3}*J + 3n^{-2}*dJ/dn + 2n^{-3}*J -n^{-2}*dJ/dn -n^{-2}*dJ/dn +n^{-1}*d^2J/dn^2$$

$$= n^{-1}*d^2J/dn^2 + n^{-2}*dJ/dn + n^{-1}*J -n^{-3}*J$$

$$=n^3\{ n^2*d^2J/dn^2 + n*dJ/dn + (n^2-1)J \} = 0$$

従って、 $n^2*d^2J/dn^2 + n*dJ/dn + (n^2-1)J = 0 \dots \textcircled{1}$

次に、 $J=n*N =n * \int \{(1-w^2)^{1/2} * \cos nw \} dw$ が、微分方程式①の解であることを

示します。計算を簡単にするために三角関数をオイラーの公式

$$\exp(inw) = \sin nw + i \cos nw \quad (i \text{ は虚数単位})$$

により J の $\cos nw$ を指数関数に置換えた y を考えます。すなわち、

$$y = n * \int \{(1-w^2)^{1/2} * \exp(inw) \} dw$$

y の n に関する微分を求めると、積分と微分の順序交換により

$$dy/dn = \int [d\{n * (1-w^2)^{1/2} * \exp(inw)\} / dn] dw$$

$$= \int [(1-w^2)^{1/2} * d\{n * \exp(inw)\} / dn] dw$$

$$= \int [(1-w^2)^{1/2} * \{ \exp(inw) + inw * \exp(inw) \}] dw$$

$$d^2y/dn^2 = \int [(1-w^2)^{1/2} * d\{\exp(inw) + inw * \exp(inw)\} / dn] dw$$

$$= \int [(1-w^2)^{1/2} * \{ iw * \exp(inw) + iw * \exp(inw) -nw^2 * \exp(inw) \}] dw$$

$$= \int [(1-w^2)^{1/2} * \{ 2iw * \exp(inw) -nw^2 * \exp(inw) \}] dw$$

従って、

$$n^2*d^2y/dn^2 + n*dy/dn + (n^2-1)y$$

$$= \int ((1-w^2)^{1/2} * [n^2* \{ 2iw * \exp(inw) -nw^2 * \exp(inw) \}$$

$$+ n*\{ \exp(inw) + inw * \exp(inw) \} + (n^2-1) * n * \exp(inw)]) dw$$

$$= \int ((1-w^2)^{1/2} * [2n^2*iw * \exp(inw) -n^3w^2 * \exp(inw)]$$

$$+ n*\exp(inw) + in^2w * \exp(inw) \} + n(n^2-1) * \exp(inw)]) dw$$

$$= \int ((1-w^2)^{1/2} * [2n^2*iw * \exp(inw) -n^3w^2 * \exp(inw)]$$

$$\begin{aligned}
& + n \cdot \exp(inw) + in^2 w \cdot \exp(inw) \} + n^3 \cdot \exp(inw) - n \cdot \exp(inw) \}) dw \\
= & \int ((1-w^2)^{1/2} \cdot [2n^2 \cdot iw \cdot \exp(inw) - n^3 w^2 \cdot \exp(inw)] \\
& + in^2 w \cdot \exp(inw) \} + n^3 \cdot \exp(inw)]) dw \\
= & n^2 \cdot \int ((1-w^2)^{1/2} \cdot [3iw \cdot \exp(inw) + n(1-w^2) \cdot \exp(inw)]) dw \\
= & n^2 \cdot \int (3(1-w^2)^{1/2} \cdot iw \cdot \exp(inw) + n(1-w^2)^{3/2} \cdot \exp(inw)) dw \\
= & -i \cdot n^2 \cdot \int (-3(1-w^2)^{1/2} \cdot w \cdot \exp(inw) + i \cdot n(1-w^2)^{3/2} \cdot \exp(inw)) dw \\
= & -i \cdot n^2 \cdot \int [d\{ \exp(inw) \cdot (1-w^2)^{3/2} \} / dw] dw \\
= & -i \cdot n^2 \cdot [\exp(inw) \cdot (1-w^2)^{3/2}] (w=-1, 1) \\
= & -i \cdot n^2 \cdot [(\exp(in) \cdot (1-1^2)^{3/2}) - \exp(-in) \cdot (1-(-1)^2)^{3/2}] \\
= & -i \cdot n^2 \cdot [(\exp(in) \cdot (0)) - \exp(-in) \cdot (0)] = 0
\end{aligned}$$

すなわち、 $J = n \cdot N = n \cdot \int \{ (1-w^2)^{1/2} \cdot \cos nw \} dw$ は微分方程式①の解です。